# שיעור 03

מבוא להסתברות

[Comments]

גיא רוזנדורן, 14/05/2008 13:40

# קומבינטוריקה

## תרגילי סיכום

### קוביות

קוביות דומינו מורכבת משני מספרים, ולא מבחינים בין שני חלקי הקובייה.

כלומר, הקובייה |1|2| זהה ל |2|1|. כמה קוביות דומינו שונות אפשר ליצור מהמספרים $1,2,\dots,n$.

נמיין את קוביות הדומינו לשתי קבוצות זרות.

א. קוביות הדומינו שרשומים עליהם מספרים שווים: סה"כ n קוביות.

ב. קוביות הדומינו שרשומים עליהם מספרים שונים: בוחרים שני מספרים שונים מתוך n, כלומר $\binom{n}{2}$.

ולפי עיקרון החיבור, סה"כ קוביות הדומינו: $n+\binom{n}{2}=n+\frac{n!}{2!(n-2)!}=n+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n}{2}(2+n-1)=\frac{n(n+1)}{2}$.

אפשר היה לספור גם את הקוביות בצורה הבאה:

נספור את הקוביות שמופיע בהם "1": $|1|1|,|1|2|,\dots,|1|n|$. סה"כ n קוביות.

נספור את הקוביות שמופיע בהם "2" אבל לא "1": $|2|2|,|2|3|,\dots,|2|n|$. סה"כ n-1 קוביות.

וממשיכים ככה עד השלב האחרון בו יש רק את הקובייה $|n|n|$. כלומר אפשרות אחת.

סה"כ אפשרויות: $1+2+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

### ספרים

מסדרים על מדף 12 ספרים מהם 5 ספרי מתמטיקה, 4 ספרי פיסיקה, 3 ספרי כימיה.

א. כמה סידורים שונים ישנם?

מספר הסידורים שלהם בשורה הוא $12!$, בהנחה שכל הספרים שונים זה מזה.

ב. כמה סידורים שונים ישנם אם נדרש שספרים מאותו תחום יעמדו זה לצד זה.

לפנינו פעולה 4 שלבית.

שלב א: נבדוק כמה אפשרויות יש לסדר את התחומים: $3!$ אפשרויות.

שלב ב: מקום המתאים לספרי המתמטיקה, מסדרים את ספרי המתמטיקה: $5!$ אפשרויות

שלב ג: נסדר את ספרי הפיסיקה: $4!$ אפשרויות.

שלב ד: נסדר את ספרי הכימיה: $3!$ אפשרויות.

ולפי עיקרון הכפל, סה"כ אפשרויות: $3!\,4!\,5!\,3!$

ג. כמו בסעיף ב, אבל כאשר ספרים מאותו תחום נראים זהים (לא ניתן להבחין ביניהם בעין).

מספר הסידורים שניתן להבחין בהם בעין הוא $3!$ (רק בסידורי התחומים, כי בתוך אותו תחום לא ניתן להבחין בשום דבר).

### מחלקים

כמה מחלקים שונים יש למספר 9000?

צריך לפרק את 9000 לגורמים ראשוניים: $9000=1000*9=10^3*9=2^3*5^3*3^2=2^3*3^2*5^3$.

מחלק של 9000 הוא מספר מהצורה $2^x*3^y*5^z$, כאשר $x=0,1,2,3\quad y=0,1,2\quad z=0,1,2,3$,

כאשר מחלק הוא וקטור מהצורה $(x,y,z)$. אז סה"כ מספר חלקים שונים: $4*3*4=48$.

## זהויות קומבינטוריות

הראו כי $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n * 2^{n-1}$.

$$k * \binom{n}{k} = k * \left(\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\right) = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} * n = \binom{n-1}{k-1} * n$$

$$k * \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} * n$$

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j} = n * 2^{n-1}$$

תזכורת: בשיעור הקודם הראנו ש $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$.

הראו כי $\binom{k-1}{k-1} + \cdots + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}$.

אנחנו מכירים את הזהות של משולש פסקל שאומרת: $\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}$. נמשיך לפתח:

$$\binom{n-1}{k} = \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-3}{k}$$

$$\vdots$$

$$\binom{k}{k} = \binom{k-1}{k-1} + \binom{k-1}{k}$$

$$\binom{k-1}{k} = 0$$

צירוף השוויונות נותן לנו ש $\binom{k-1}{k-1} + \cdots + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}$.

# הסתברות

## דוגמאות כאתגרים

את הדוגמאות הבאות אנחנו לא אמורים להבין, וישמשו אותנו בהמשך.

### כדורים

בכד 10 כדורים מהם 6 אדומים ו-4 לבנים. מוציאים מהכד כדורים בזה אחר זה (ללא החזרה).
א. מה הסיכוי שהכדור הראשון שהוצא הוא אדום?
יש סבירות שווה לכל כדור לצאת, ולכן הסיכוי הוא $\frac{6}{10}$.
ב. מה הסיכוי שהכדור השני שהוצא הוא אדום?
תלוי מה הראשון יצא. אם הראשון היה אדום אז $\frac{5}{9}$ והם הראשון היה לבן אז $\frac{6}{9}$.
אבל אנחנו מחפשים תשובה אחת ויחידה, והיא $\frac{6}{10}$. וגם הסיכוי שהכדור השביעי יהיה אדום הוא $\frac{6}{10}$.
בשבועות הקרובים נבין למה.

### לידה

הסיכוי שבלידה מסוימת ייולד בן הוא $\frac{1}{2}$, ואין השפעה של מין היילוד בין לידה אחת לאחרת.
מתבוננים במשפחות שיש להם שני ילדים, וידוע שאחת הילדים הוא בן.
מה הסיכוי שהילד האחר הוא גם כן בן?
התשובה הנכונה היא $\frac{1}{3}$, אבל איך? נסביר בהמשך.

### בעיית המזכירה הרשלנית

למזכירה נתנו להדפסה n מכתבים המיועדים ל n אנשים שונים. היא מדפיסה את n המכתבים, מכינה להם n מעטפות מתאימות, אך מכניסה את המכתבים למעטפות באופן מקרי לחלוטין.
יכולים לקרות כל מיני דברים: כולם יקבלו את המכתבים שלהם, אף מכתב לא יגיע ליעדו, וכו'.
המספר הממוצע של המכתבים שהגיעו ליעדם הוא תמיד 1.
סתם לדוגמא: כאשר $n = 2$ יש שתי אפשרויות: או שהמזכירה תכניס את המכתבים למעטפות הנכונות, ואז שני המכתבים יגיעו ליעדכם, או שהיא תכניס את המכתבים למעטפות הפוכות, ואז אפס מכתבים יגיעו ליעדם. הממוצע במקרה זה הוא 1.

### גלגל הזהב

מול מתמודד שלוש וילונות. מאחורי וילון יש מכונית חדשה, ואם המתמודד יבחר את הוילון הנכון יזכה במכונית. הוא בוחר וילון אחד, ונשארים שנים. מתוך השנים האלה פותחים וילון אחד, ומאחוריו רק אויר. נותרו שני וילונות סגורים – זה שבחר המתמודד, ועוד אחד. ורק מאחורי וילון אחד נמצאת המכונית. נותנים למתמודד אפשרות להחליף את הוילון שבחר. האם כדאי לו? התשובה היא שכדאי לו. בתחילת המשחק, היה לו סיכוי של $\frac{1}{3}$ לזכות במכונית. אם יחליף, הסיכוי שלו יוכפל ל $\frac{2}{3}$.

מהדוגמאות האלה למדנו שהתשובות לבעיות הסתברותיות לא טריוויאליות, ושיש מה ללמוד.

## מרכבי בעיה הסתברותית

### דוגמאות

מטילים מטבע שיש לו שני צדדים: "עץ" ו-"תאריך". אין דרך לחזות את תוצאת הטלת המטבע. יש צורך לומר משהו על השכיחות של כל אחת משתי התוצאות.
אם המטבע סימטרי, אזי יש סיכוי שווה של $\frac{1}{2}$ (או $50\%$) לכל אחת משתי התוצאות.

בוחרים קלף מתוך חפיסת קלפים סטנדרטית. אם החפיסה מעורבבת היטב, אזי יש האומרים כי הסיכוי שהקלף שנבחר הוא קלף "אס" הוא $\frac{1}{13}$.

מטילים קובייה אדומה וקובייה שחורה. לכל קובייה שש פאות, על כל פאה רשום מספר מאחד עד שש. מתבוננים בסכום המספרים שהופיעו. אומרים כי יש סיכוי של $\frac{1}{6}$ שסכום המספרים הוא בדיוק 7.

### מרכיבים משותפים

1. בכל הדוגמאות נערך ניסוי.
2. בכל אחד מהמקרים, לניסוי יש מספר תוצאות אפשריות, ואין שום אפשרות לחזות את תוצאת הניסוי. ניסויים אלה נקראים ניסוי מקרי.
3. יש צורך לומר משהו על "הסבירות" של התוצאות השונות. הדבר נעשה הצמדת מספרים לתוצאות השונות, והמספרים הללו נקראים בשם "הסתברות" או "סיכוי".

### מרכיבי בעיה הסתברותית

הם קבוצת התוצאות של הניסוי, המצבים השונים שמעניינים אותנו בניסוי וההסתברויות.

## מרחב המדגם

### הגדרה

***מרחב המדגם של ניסוי מקרי הוא קבוצת התוצאות השונות של ניסוי.***
***תוצאה אפשרית נקראת נקודת מדגם. באנגלית: Sample Place, Sample Point.***
***מרחב המדגם מסומן ב $\Omega$.***

### דוגמאות

מרחב המדגם של הטלת מטבע: $\Omega = \{ת,ע\}$.
מרחב המדגם של הטלת מטבע פעמיים: $\Omega = \{(ת,ת),(ע,ת),(ת,ע),(ע,ע)\}$.
מרחב המדגם של הטלת קובייה: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

### הערה

מרחב המדגם כולל את כל התוצאות האפשריות לפני ביצוע הניסוי. לאחר ביצוע הניסוי קורית רק תוצאה אחת בלבד מתוך מרחב המדגם.

# שיעור 03

מבוא להסתברות

[Comments]

גיא רוזנדורן, 14/05/2008 13:40

---

## מאורעות

### דוגמא

מטילים קובייה לצורך ביצוע התערבות כאשר:
אם הופיעה תוצאה זוגית אז הרווחנו 10 שקלים, ואם הופיעה תוצאה אי-זוגית הפסדנו 10 שקלים.
המאורע המעניין אותנו, שנסמנו ב A, הוא "אני זוכה". נזהה בין A לבין קבוצת התוצאות שבהן המאורע קורה. כלומר, המאורע A קורה אם התוצאה היא $2,4,6$. כלומר: $A = \{2,4,6\}$ $A \subseteq \Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

### הגדרה

***מאורע הוא קבוצה חלקית של מרחב המדגם והוא קורה אם הניסוי מסתיים בתוצאה בקבוצה המייצגת. מאורע הוא פשוט אם הוא כולל נקודת מדגם אחת בלבד.***

### דוגמאות

מטילים שתי קוביות שונות.
מרחב המדגם הוא $\Omega = \{(m,n)|m,n = 1,2,3,4,5,6\}$. לניסוי יש 36 תוצאות אפשריות שונות.
המאורע A הוא תוצאות בשתי הקוביות שוות. כלומר: $A = \{(1,1),(2,2)(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$.
המאורע B הוא סכום התוצאות הקטן מארבע. כלומר: $B = \{(1,1),(1,2)(2,1)\}$.
המאורע C הוא סכום התוצאות שווה לשתים-עשרה. כלומר: $C = \{(6,6)\}$, והוא מאורע פשוט.
המאורע D הוא סכום התוצאות שווה לשבע. כלומר: $D = \{(1,6),(6,1),(2,5),(5,2),(3,4),(4,3)\}$.
הוטלו שתי הקוביות והופיעה התוצאה $(6,6)$. קרו המאורעות A,C. לא קרו המאורעות B,D.
המאורע E הוא סכום התוצאות פחות משתים-עשרה, והמאורע F לא הופיעה התוצאה $(6,6)$.
המאורעות $\mathrm{E},\mathrm{F}$ הם מאורעות שווים: $\mathrm{E} = \mathrm{F}$.

### הערות

***ניסוי מסתיים בתוצאה אחת בלבד.***
***לאחר ביצוע הניסוי יכולים לקרות בו-זמנית מספר מאורעות.***
***מרחב המדגם $\Omega$ הוא מאורע שתמיד קורה, ונקרא המאורע הוודאי.***
***המאורע הריק $\emptyset$ אף פעם לא קורה, ונקרא מאורע בלתי אפשרי.***
***שני מאורעות זהים יכולים להיות מיוצגים מילולית בצורות שונות, והם מאורעות שווים.***

## יחסים ופעולות בין קבוצות והצגתם למאורעות

1. יחס השוויון: A ו B קורים בו-זמנית. אם A קרה גם B קרה ולהפך. נסמן A=B.
2. יחס ההכלה: אם A קרה גם B קרה, ולא להפך. נסמן $A \subset B$
3. יחס המשלים: B קרה אם A לא קרה. נסמן $\bar{A}$.
4. יחס האיחוד: קרה לפחות אחד מהמאורעות A,B. או ש A קרה או ש B קרה או ששניהם. נסמן $A \vee B$.
5. יחד החיתוך: גם A וגם B קרו. נסמן $A \wedge B$.

# שיעור 03

מבוא להסתברות

[Comments]

גיא רוזנדורן, 14/05/2008 13:40

---

# הסתברות

## התייצבות השכיחויות היחסיות

לוקחים מטבע ומטילים אותו n פעמים.

***השכיחות היחסית של הופעת עץ ב n הטלות תסומן ב $f_n$ ושווה:*** $f_n = \frac{\text{מספר הפעמים שהופיע עץ}}{n}$.

***ההסתברות שאנחנו מייחסים למאורע הוא השכיחות היחסית המתייצבת של אותו מאורע כאשר חוזרים על הניסוי הרבה מאוד פעמים.***

המשמעות של הסתברות במובן הזה היא רק כאשר חוזרים על ניסוי הרבה מאוד פעמים.

# שיעור 03

מבוא להסתברות

[Comments]

גיא רוזנדורן, 14/05/2008 13:40

## תוכן עניינים

# שיעור 03

מבוא להסתברות

[Comments]

גיא רוזנדורן, 14/05/2008 13:40

## תקציר משפטים, נוסחאות והדגשים

מרחב המדגם של ניסוי מקרי הוא קבוצת התוצאות השונות של ניסוי.
תוצאה אפשרית נקראת נקודת מדגם. באנגלית: Sample Place, Sample Point.
מרחב המדגם מסומן ב $\Omega$.
מאורע הוא קבוצה חלקית של מרחב המדגם והוא קורה אם הניסוי מסתיים בתוצאה בקבוצה המייצגת.
מאורע הוא פשוט אם הוא כולל נקודת מדגם אחת בלבד.
ניסוי מסתיים בתוצאה אחת בלבד.
לאחר ביצוע הניסוי יכולים לקרות בו-זמנית מספר מאורעות.
מרחב המדגם $\Omega$ הוא מאורע שתמיד קורה, ונקרא המאורע הוודאי.
המאורע הריק $\emptyset$ אף פעם לא קורה, ונקרא מאורע בלתי אפשרי.
שני מאורעות זהים יכולים להיות מיוצגים מילולית בצורות שונות, והם מאורעות שווים.
השכיחות היחסית של הופעת עץ ב n הטלות תסומן ב $\boldsymbol{fn}$ ושווה: $n$מספר הפעמים שהופיע עץ $= fn$.
ההסתברות שאנחנו מייחסים למאורע הוא השכיחות היחסית המתייצבת של אותו מאורע כאשר חוזרים על הניסוי הרבה מאוד פעמים.