

ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים

הגדרה

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F . תהי $T: V \rightarrow V$ העתקה ליניארית. יהי $\lambda \in F$.
 הקבוצה $V_\lambda = \{v \in V \mid T(v) = \lambda v\}$ נקראת **המרחב העצמי של T השייך ל λ** .
הווקטור $v \in V$ נקרא וקטור עצמי של T השייך ל λ אם $T(v) = \lambda v$, כלומר $v \in V_\lambda$.
הסקלר λ נקרא ערך עצמי של T אם יש $v \in V$ כך ש $T(v) = \lambda v$, כלומר אם $V_\lambda \neq \{0\}$.

דוגמה

תהי $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ העתקה ליניארית נתונה ע"י: $T\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}$.

לכל $x \in \mathbb{R}$ $T\left(\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 1 \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ לכן וקטור עצמי של T השייך ל-1. בפרט 1 הוא ערך עצמי של T .

לכל $y \in \mathbb{R}$ $T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}\right) = -1 \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$ לכן וקטור עצמי של T השייך ל-(-1). בפרט, (-1) ערך עצמי של T .

הגדרה

יהי שדה F , ותהי $A \in M_n(F)$. יהי $\lambda \in F$.
 המרחב הווקטורי $V_\lambda = \{v \in F^n \mid Av = \lambda v\}$ נקרא **המרחב העצמי של A השייך ל λ** .
הווקטור $v \in F^n$ נקרא וקטור עצמי של A השייך ל λ אם $Av = \lambda v$, כלומר $v \in V_\lambda$.
הסקלר λ נקרא ערך עצמי של A אם $v \in F^n$ כך ש $Av = \lambda v$.

למה

יהי V מרחב וקטורי מעל F , תהי $T: V \rightarrow V$ העתקה ליניארית, ויהי $\lambda \in F$.
 יהי $B = (v_1, \dots, v_n)$ בסיס סדור של V .

תהי מטריצה המעבר $A = [T]_B^B$ אז:

הווקטור $v \in V$ הוא וקטור עצמי של T השייך ל λ אם $[v]_B \in F^n$ וקטור עלמי של A השייך ל λ .
הסקלר λ הוא ערך עצמי של T אם ורק אם λ הוא ערך עצמי של A .

הוכחה

העתקה $V \rightarrow F^n$ הנתונה ע"י $v \mapsto [v]_B$ היא איזומורפיזם של מרחב וקטורי.

בפרט, $[T(v)]_B = \lambda [v]_B$. כמו כן: $[T(v)]_B = A[v]_B$. לכן:

$T(v) = \lambda v$ אם ורק אם $[T(v)]_B = [\lambda v]_B$, כלומר: $A[v]_B = \lambda [v]_B$. זו הוכחה של (א).

נובע מ (א) כי $[v]_B \neq 0$ אם ורק אם $v \neq 0$ (וגם $v \mapsto [v]_B$ היא על).

¹ בספרים בדרך-כלל דורשים שגם $v \neq 0$, אנחנו לא נדרוש את זה.
² כשיש חשיבות לסדר, רושמים את הווקטורים בסוגריים עגולות. כשאין חשיבות = סוגרים מסולסלות.

שיעור 05

אלגברה ליניארית 2

ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים

גיא רוזנדורן, 22/05/2008 08:09

משפט

יהי V מרחב וקטורי מעל F , תהי $T: V \rightarrow V$ העתקה ליניארית, יהי $v \in F$.

או $V_\lambda = \ker(T - \lambda 1_V)$. בפרט V_λ הוא תת-מרחב של V .

לכן λ ערך עצמי של T אם ורק אם $T - \lambda 1_V$ אינה חד-חד-ערכית.

יהי F שדה, $A \in M_n(F)$, $\lambda \in F$. או V_λ מרחב הפתרונות של המערכת $(A - \lambda I_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$ ההומוגנית.

בפרט, V_λ תת-מרחב של F^n . לכן λ ערך עצמי של A אם ורק אם $\det(A - \lambda I_n) = 0$ - אינה הפיכה.

הוכחה

$v \in \ker(T - \lambda 1_V)$ אם ורק אם $(T - \lambda 1_V)(v) = 0$ אם ורק אם $T(v) - \lambda v = 0$ אם ורק אם $T(v) = \lambda v$.

מכאן $V_\lambda = \ker(T - \lambda 1_V)$.

λ ערך עצמי אם ורק אם $V_\lambda \neq 0$ אם ורק אם $\ker(T - \lambda 1_V) \neq 0$ אם ורק אם $T - \lambda 1_V$ לא חד-חד-ערכית.

הערה

אנחנו רוצים לפשט את המטריצות שמייצגות העתקות ליניאריות, עדיף למטריצות לכניסות, וזה הכלי שבעזרתו נעשה את זה. מטריצות לכניסות עם מטריצות עם איברים שונים מאפס באלכסון, ואפסים מחוץ לאלכסון. את המטריצות האלה קל לחבר, לחסר, להכפיל ולהפוך.

משפט

יהי V מרחב וקטורי מעל F , $T: V \rightarrow V$ העתקה ליניארית, $B = (v_1, \dots, v_n)$ בסיס סדור, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in F$.

או $[T]_B^B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & & 0 \\ 0 & \ddots & & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ אם ורק אם v_i וקטור עצמי של T השייך ל λ_i .

אם זה קורה אז $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ הם ערכים עצמיים של T .

הוכחה

$$[T]_B^B = ([T(v_1)]_B \quad \dots \quad [T(v_n)]_B)$$
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & & 0 \\ 0 & \ddots & & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = (\lambda e_1 \quad \dots \quad \lambda_n e_n) = (\lambda_1 [v_1]_B \quad \dots \quad \lambda_n [v_n]_B)$$
$$[T]_B^B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & & 0 \\ 0 & \ddots & & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow [T(v_i)]_B = \lambda_i [v_i]_B \Leftrightarrow [T(v_i)]_B = [\lambda_i v_i]_B \Leftrightarrow T(v_i) = \lambda_i v_i$$

לכן הטענה האחרונה $v_i \neq 0$ לכל i כי B בסיס. מש"ל.

מסקנה

להצגה ליניארית $T: V \rightarrow V$ יש הצגה אלכסונית אם V יש בסיס מווקטורים עצמיים של T

$1_V = V \rightarrow V$, כלומר: $1_V(v) = v$. זו העתקת הזהות של V .

משפט

יהי F שדה, תהי $A \in M_n(F)$. אם יש $P \in M_n(F)$ הפיכה כך ש $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & & 0 \\ 0 & \ddots & & 0 \\ 0 & & \ddots & 0 \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ אז ל F^n

יש בסיס (v_1, \dots, v_n) המורכב מוקטורים עצמיים של A , כאשר v_i שייך ל λ_i . להיפך, אם יש בסיס (v_1, \dots, v_n) המורכב מוקטורים עצמיים של A , כאשר v_i שייך לערך עצמי λ_i ,

ונגדיר $P = (v_1 \dots v_n)$ אז $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & & 0 \\ 0 & \ddots & & 0 \\ 0 & & \ddots & 0 \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

הוכחה

תהי $P \in M_n(F)$ מטריצה הפיכה, ותהיינה v_1, \dots, v_n עמודותיה. כלומר, $P = (v_1 \dots v_n)$ אז v_1, \dots, v_n בת"ל ולכן בסיס של F^n .

$$AP = A(v_1 \dots v_n) = (Av_1 \dots Av_n)$$

$$P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & & 0 \\ 0 & \ddots & & 0 \\ 0 & & \ddots & 0 \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} = P(\lambda e_1 \dots \lambda_n e_n) = (P(\lambda e_1) \dots P(\lambda_n e_n)) = (\lambda P(e_1) \dots \lambda_n P(e_n))$$

$$= (\lambda_1 v_1 \dots \lambda_n v_n)$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & & 0 \\ 0 & \ddots & & 0 \\ 0 & & \ddots & 0 \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow AP = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & & 0 \\ 0 & \ddots & & 0 \\ 0 & & \ddots & 0 \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow Av_j = \lambda_j v_j$$

להיפך, אם v_1, \dots, v_n בסיס ל F^n אז המטריצה $P = (v_1 \dots v_n) \in M_n(F)$ הפיכה,

ולפי החישוב לעיל, אם $Av_j = \lambda_j v_j$ לכל j אז $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & & 0 \\ 0 & \ddots & & 0 \\ 0 & & \ddots & 0 \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ מש"ל.

דוגמה

מצא ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים של המטריצה $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$.

λ היא ערך עצמי של A אם ורק אם $\det(A - \lambda I_2) = 0$.

$$\det(A - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} 4 - \lambda & 5 \\ 3 & 4 - \lambda \end{pmatrix} = (4 - \lambda)^2 - 15 = \lambda^2 - 8\lambda + 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{60}}{2} = 4 \pm \sqrt{15}$$

$v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ הוא וקטור עצמי ל $\lambda = 4 \pm \sqrt{15}$ אם ורק אם $(A - \lambda I)v = 0$.

$$\begin{pmatrix} 4 - (4 + \sqrt{15}) & 5 \\ 3 & 4 - (4 + \sqrt{15}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{15} & 5 \\ 3 & -\sqrt{15} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in sp \left(\begin{pmatrix} 5 \\ \sqrt{15} \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{pmatrix} 4 - (4 - \sqrt{15}) & 5 \\ 3 & 4 - (4 - \sqrt{15}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{15} & 5 \\ 3 & \sqrt{15} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in sp \left(\begin{pmatrix} -5 \\ \sqrt{15} \end{pmatrix} \right)$$

לפי המשפט: $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 + \sqrt{15} & 0 \\ 0 & 4 - \sqrt{15} \end{pmatrix}$ אם למשל, $P = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ \sqrt{15} & \sqrt{15} \end{pmatrix}$.

משפט

יהי V מרחב וקטורי, $T: V \rightarrow V$ העתקה ליניארית, וקטורים עצמיים של T שונים מאפס השייכים לערכים עצמיים $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ בהתאמה. נניח $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ שונים זה מזה. אז v_1, \dots, v_m בת"ל.

נוכיח באינדוקציה על m .

אם $m = 1$ אז $v_1 \neq 0$ ולכן v_1 בת"ל.

נניח נכונות עבור $(m - 1)$ ונוכיח עבור m וקטורים v_1, \dots, v_m .

יהיו $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in F$ כך ש $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{m-1} v_{m-1} + \alpha_m v_m = 0$ (1). נראה שכל המקדמים אפסים. נפעיל את T על שני הצדדים:

$$(2) \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \alpha_{m-1} \lambda_{m-1} v_{m-1} + \alpha_m \lambda_m v_m = 0$$

$$(1) \alpha_1 \lambda_m v_1 + \dots + \alpha_{m-1} \lambda_m v_{m-1} + \alpha_m \lambda_m v_m = 0$$

$$\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_m) v_1 + \dots + \alpha_{m-1} (\lambda_{m-1} - \lambda_m) v_{m-1} = 0$$

לפי הנחת האינדוקציה, v_1, \dots, v_{m-1} בת"ל, ולכן:

$$\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_m) v_1 + \dots + \alpha_{m-1} (\lambda_{m-1} - \lambda_m) v_{m-1} + \alpha_m \lambda_m v_m = 0$$

אבל $\lambda_i - \lambda_m \neq 0$ ולכן $1 \leq i \leq m - 1$ לכן $\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1} = 0$. נציב זאת ב (1) ונקבל $\alpha_m v_m = 0$.

אבל $v_m \neq 0$ ולכן $\alpha_m = 0$. לכן v_1, \dots, v_m בת"ל.

מסקנה

V מרחב וקטורי מעל F , $T: V \rightarrow V$ העתקה ליניארית, ערכים עצמיים של T שונים.

לכל $1 \leq i \leq n$, תהי v_{i1}, \dots, v_{ik_i} סדרה בת"ל של וקטורים עצמיים של T השייכים ל λ_i .

כלומר זוהי סדרה בת"ל במרחב V_{λ_i} .

אז הסדרה: $v_{11}, \dots, v_{1k_1}, v_{21}, \dots, v_{2k_2}, \dots, v_{n1}, \dots, v_{nk_n}$ בת"ל

הוכחה

$$\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1k_1}, \alpha_{21}, \dots, \alpha_{2k_2}, \dots, \alpha_{n1}, \dots, \alpha_{nk_n} \in F$$

$$\underbrace{(\alpha_{11} v_{11} + \dots + \alpha_{1k_1} v_{1k_1})}_{w_1} + \dots + \underbrace{(\alpha_{n1} v_{n1} + \dots + \alpha_{nk_n} v_{nk_n})}_{w_n} = 0$$

$$(3) w_1 + \dots + w_n = 0$$

אז $w_i \in V_{\lambda_i}$ כי w_i צירוף ליניארי של איברי V_{λ_i} .

אם $w_1 = \dots = w_n = 0$ אז מתוך המשוואה לעיל נסיק $\alpha_{i1} = \dots = \alpha_{ik_i} = 0$ לכל i , כי v_{11}, \dots, v_{1k_1} בת"ל לפי

ההנחה, וסיימנו. נניח בשלילה ש w_1, \dots, w_n לא כולם אפס. יהיו w_{j_1}, \dots, w_{j_n} השונים מאפס מביניהם.

$w_{j_i} \in V_{\lambda_{j_i}}$ ולכן לפי המשפט הקודם w_{j_1}, \dots, w_{j_n} בת"ל. אבל לפי (3) קיבלנו סתירה. מש"ל.

שיעור 05

אלגברה ליניארית 2

ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים

גיא רוזנדורן, 22/05/2008 08:09

תוכן עניינים

1..... ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים

תקציר משפטים, נוסחאות והדגשים

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F . תהי $T: V \rightarrow V$ העתקה ליניארית. יהי $\lambda \in F$.
 הקבוצה $V\lambda = \{v \in V \mid Tv = \lambda v\}$ נקראת המרחב העצמי של T השייך ל λ .
 הווקטור $v \in V$ נקרא וקטור עצמי של T השייך ל λ אם $Tv = \lambda v$, כלומר $v \in V\lambda$.
 הסקלר λ נקרא ערך עצמי של T אם יש $v \in V$ כך ש $0 \neq v$ ו $Tv = \lambda v$, כלומר אם $V\lambda \neq \{0\}$.
 יהי שדה F , ותהי $A \in Mn(F)$. יהי $\lambda \in F$.
 המרחב הווקטורי $V\lambda = \{v \in F^n \mid Av = \lambda v\}$ נקרא המרחב העצמי של A השייך ל λ .
 הווקטור $v \in F^n$ נקרא וקטור עצמי של A השייך ל λ אם $Av = \lambda v$, כלומר $v \in V\lambda$.
 הסקלר λ נקרא ערך עצמי של A אם $v \in F^n$ כך ש $0 \neq v$ ו $Av = \lambda v$.
 יהי V מרחב וקטורי מעל F , תהי $T: V \rightarrow V$ העתקה ליניארית, ויהי $\lambda \in F$.
 יהי $B = (v_1, \dots, v_n)$ בסיס סדור של V .
 תהי מטריצה המעבר $A = TBB'$ אז:
 הווקטור $v \in V$ הוא וקטור עצמי של T השייך ל λ אם $vB \in F^n$ וקטור עלמי של A השייך ל λ .
 הסקלר λ הוא ערך עצמי של T אם ורק אם λ הוא ערך עצמי של A .
 יהי V מרחב וקטורי מעל F , תהי $T: V \rightarrow V$ העתקה ליניארית, יהי $v \in F$.
 אז $V\lambda = \ker(T - \lambda I)$. בפרט $V\lambda$ הוא תת-מרחב של V .
 לכן λ ערך עצמי של T אם ורק אם $T - \lambda I$ אינה חד-חד-ערכית.
 יהי F שדה, $A \in Mn(F)$, $\lambda \in F$. אז $V\lambda$ מרחב הפתרונות של המערכת $A - \lambda I(x_1 \dots x_n) = 0$ ההומוגנית.
 בפרט, $V\lambda$ תת-מרחב של F^n . לכן λ ערך עצמי של A אם ורק אם $0 = \det(A - \lambda I)$ - אינה הפיכה.
 יהי V מרחב וקטורי מעל F , $T: V \rightarrow V$ העתקה ליניארית, $B = (v_1, \dots, v_n)$ בסיס סדור, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in F$.
 אז $TBB = \lambda_1 000 \dots 000 \dots 000 \lambda_n$.
 אם זה קורה אז $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ הם ערכים עצמיים של T .
 להצגה ליניארית $T: V \rightarrow V$ יש הצגה אלכסונית אם V יש בסיס מווקטורים עצמיים של T
 יהי F שדה, תהי $A \in Mn(F)$. אם יש $P \in Mn(F)$ הפיכה כך ש $P - 1AP = \lambda_1 000 \dots 000 \lambda_n$, אז ל F^n
 יש בסיס (v_1, \dots, v_n) המורכב מוקטורים עצמיים של A , כאשר v_i שייך ל λ_i .
 להיפך, אם יש בסיס v_1, \dots, v_n המורכב מוקטורים עצמיים של A , כאשר v_i שייך לערך עצמי λ_i , ונגדיר
 $P = (v_1 \dots v_n)$ אז $P - 1AP = \lambda_1 000 \dots 000 \lambda_n$.
 יהי V מרחב וקטורי, $T: V \rightarrow V$ העתקה ליניארית, v_1, \dots, v_m וקטורים עצמיים של T שונים מאפס השייכים
 לערכים עצמיים $\lambda_1, \dots, \lambda_m$. נניח $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ שונים זה מזה. אז v_1, \dots, v_m בת"ל.
 V מרחב וקטורי מעל F , $T: V \rightarrow V$ העתקה ליניארית, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ערכים עצמיים של T שונים.
 לכל $1 \leq i \leq n$, תהי סדרה בת"ל של וקטורים עצמיים של T השייכים ל λ_i .
 כלומר זוהי סדרה בת"ל במרחב $V\lambda_i$.
 אז הסדרה: $v_{11}, \dots, v_{1k_1}, v_{21}, \dots, v_{2k_2}, \dots, v_{n1}, \dots, v_{nk_n}$ בת"ל