שיעור 05

חדו"א 2

שימושים לאינטגרלים

גיא רוזנדורן, 22/05/2008 10:09

הוכחת הלמה של Binnet

נגדיר $F(x) = \int_{b_1}^{x} f$ כך ש:

$$\int_{b-1}^{b_2} fg = \int_{b_1}^{b_2} F'g = F(b_2)g(b_2) - F(b_1)g((b-1) - \int_{b_1}^{b_2} Fg' =^{1} F(b_2)g(b_2) - F(\xi)\int_{b-1}^{b_2} f'$$
$$= F(b_2)g(b_2) - F(\xi)g(b_2) + f(\xi)g(b_1) = g(b_1)F(\xi) + \big(F(b_2) - F(\xi)\big)g(b_2)$$
$$= g\int_{b_1}^{\xi} f + \int_{\xi}^{b_2} f$$

יש אינטגרלים לא אמיתיים שאי אפשר למצוא את הפונקציה הקדומה האלמנטארית אבל אפשר למצוא את הערך של האינטגרל. בתרגול הבא ותרגיל הבית הבא נראה נוסחאות שיעזרו למצוא אותם.
בין השאר, נראה בתרגול את האינטגרלים הלא אמיתיים הבאים:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$
$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

שימושים של אינטגרלים

בספר Feynman's lectures in physics של R. Feynman, בשני הפרקים הראשונים, יש הסברים טובים לאינטגרלים ושימושים לאינטגרלים.
נדבר על:

- אורך של מסילות
- נוסחת סטירלינג
- נוסחת Wallis
- נוכיח שמספר π הוא אי-רציונאלי

נוסחת סטירלינג

נוסחת סטירלינג נותנת קירוב ל $n!$: $n! \cong \sqrt{2\pi n} * n^n * e^{-n}$ כאשר $n \gg 1$. יותר מדויק לומר:

$$e^{\frac{1}{\lceil 2n+1 \rceil}}\sqrt{2\pi n}n^n e^{-n} < n! < e^{\frac{1}{\lceil 2n \rceil}}\sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}} = \sqrt{2\pi}$$

---

[1] היות ו F רציפה ו g' לא מחליפה את הסימן, אז קיים $\xi \in (b_1, b_2)$, ומתקיים שוויון לפי משפט ערך ביניים

מסילות

מסילה γ ב $\mathbb{R}^n$ מוגדרת $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ והיא העתקה רציפה. כלומר:

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} r_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_n(t) \end{pmatrix} \quad \gamma_i \in C[a,b]$$

$$\mathbb{R}^n \subset \Gamma = \gamma[a,b]$$

דוגמאות ב$\mathbb{R}^{??}$

קטע: קטע בין $A(x_1,y_2), B(x_2,y_2)$. נניח שהקטע $[a,b]=[0,1]$. אז:

$$r(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} x(t) = x_A(1-t) + x_B t \\ y(t) = y_A(1-t) + y_B t \\ 0 \le t \le 1 \end{Bmatrix}$$

מעגל: מעגל יחידה ניתן לכתוב בכמה צורות. אחת מהן:

$$r\begin{Bmatrix} x = \cos(t) & 0 \le t \le 2\pi \\ y = \sin(t) & 0 \le t \le 2\pi \end{Bmatrix}$$

אורך של מסילה

Π חלוקה של קטע $[a,b]$ בקצוות: $a = t_0 < t_1 \dots < t_n = b$, כאשר נקודה $P_i(x_i,y_i) = \gamma(t_i)$.

נסמן את אורך המסילה ב L והוא שווה:

$$L(C) = \sum_{i=0}^{n-1} L([P_i,P_{i+1}]) = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(x_{i+1}-x_i)^2 + (y_{i+1}-y_i)^2}$$

זאת ההגדרה שעשו היוונים, אבל קשה לעבוד איתה. נעבוד עם הגדרה אחרת:

Γ בעלת אורך $L(\Gamma)$ כך:

$$L(\Gamma) = \sup L(C_\Pi) = \lim_{\lambda(\Pi)\to 0} L(C_\Pi)$$

נניח ש $\gamma \in c^1$. אז:

$$L(C_\Pi) = \sum_{i=0}^{n} \sqrt{\left(x(t_{i+1}) - x(t_i)\right)^2 + \left(y(t_{i+1}) - y(t_i)\right)^2} = \sum_{i=0}^{n} \sqrt{x'(\tau_i) \vartriangle t_i + y'(\xi_i^2) \vartriangle t_i}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{x'^2(t_i) + y'^2(\xi_i)} \vartriangle t_i = \int_a^b \sqrt{x'^2 + y'^2}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(x'^2(\tau_i) + y'(\tau_i)} \vartriangle t_i + \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sqrt{x'^2(\tau_i) + y'^2(\xi_i)} - \sqrt{x'^2(\tau_i) + y'^2(\tau_i)} \right) \vartriangle t_i$$

$$= \sum{}_1 + \sum{}_2$$

$$\sum{}_1 \to_{\lambda(\Pi)\to 0} \int_a^b \sqrt{x'^2 + y'^2}$$

שיעור 05

חדו"א 2

שימושים לאינטגרלים

גיא רוזנדורן, 22/05/2008 10:09

טענה

$$\sum\ _2 \to 0$$

$$\left|\sum\ _2\right| \underbrace{\leq}_{\star} |y'(\xi_i) - y'(\tau_i| \vartriangle t_i$$

y' רציפה במידה שווה ולכן אם $\lambda(\Pi) < \delta$ אז $|y'(\xi_i) - y'(\tau_i)| < \epsilon$ ו:

$$\left|\sum\ _2\right| < \epsilon \sum_{i=0}^{n-1} \vartriangle t_i = \epsilon(b-a)$$

תת-טענה

$$(\star)\ \left|\sqrt{u^2 + v_1^2} - \sqrt{u1_2 + v_2^2}\right| \leq |v_1 - v_2|$$

$$X = \frac{v_1^2 - v_2^2}{\sqrt{u^2 + v_1^2} + \sqrt{u^2 + v_2^2}} = \left|\frac{v_1 + v_2}{\sqrt{u^2 + v_1^2} + \sqrt{u^2 + v_2^2}}\right| |v_1 - v_2|, = 1$$

משפט

אם מסילה $\gamma \in C^1$ אז γ בעלת אורך $\mathrm{L}(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{x'^2 + y'^2} = L(\gamma)$.

שאלה: מדוע אורך לא תלוי מבחירה של פרמטר t?

הערות

1. במסילה חלקה למקוטעין הנוסחה עדיין מתקיימת. זאת מסילה שיש בה נקודות אי-רציפות. המסילה מתחלקת לכמה מסילות חלקות, שהנוסחה תקפה לכל תת-מסילה, וסוכמים את כולם.
2. אם $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ C^1 למקוטעין, אז γ בעלת אורך $L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\sum_{k=1}^n r_k'^2}$.

דוגמאות

(1)	$x = \cos(t)$ $y = \sin(t)$ $0 \leq t \leq T$ $L = \int_0^T \sqrt{x'^2 + y'^2} = \int_0^T 1 = T$ $T = 2\pi \Rightarrow L = 2\pi$	מעגל
(2)	$x = -\mathrm{a}\cos(t)$ $y = \mathrm{asin}(t)$ $z = ct$ $c > 0\ , 0 \leq t \leq T$ $L = \int_0^T \sqrt{a^2 + c^2} = \sqrt{(a^2 + c^2)}T$	גליל

נוסחת Wallis

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2*2*4*4*\dots.*2n*2n}{1*3*3*5*\dots*(2n-1)(2n+1)}=\frac{\pi}{2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2$$

$$10!!=10*6*4*2$$

$$7!!=7*5*3*1$$

טענה

$$I_m=\begin{Bmatrix}\dfrac{\frac{\pi}{2}(m-1)!!}{m!!} & m \text{ זוגי} \\ \dfrac{(m-1)!!}{m!!} & m \text{ אי}-\text{זוגי}\end{Bmatrix}$$

הוכחה של טענה

$$I_m=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos(x))'\sin(x)^{m-1}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(m-1)\sin(x)^{m-2}\,x\cos(x)^2dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(m-1)\sin(x)^{m-2}\,(1-\sin(x)^2)dx=(m-1)I_{m-2}-(m-1)I_m$$

$$I_m=\frac{m-1}{m}I_{m-2}$$

$$I_0=\frac{\pi}{2}$$

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x)\,dx=-\cos(x)\mid_0^{\frac{\pi}{2}}=1$$

הוכחה של נוסחת וליס

$$I_m=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x)^m\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x)^m\,dx$$

נשתמש באי-השוויון:

$$\sin^{2n+1}x\le\sin^{2n}x\le\sin^{2n-1}x$$

$$0\le x\le\frac{\pi}{2}$$

ולכן:

$$\int_i^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2x+1}xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}xdx\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}xin^{2n-1}xdx$$

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\le\frac{\pi}{2}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\le\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}$$

$$\frac{1}{2n+1}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\le\frac{\pi}{2}\le\frac{1}{2n}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]$$

$$\underbrace{\frac{1}{2n+1}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2}_{\beta} \le \frac{\pi}{2} \le \underbrace{\frac{1}{2n}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]}_{\alpha}$$

$$\alpha - \beta = \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}\right)\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right] = \frac{1}{2n(2n+1)}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right] = \frac{1}{2n}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right] \le \frac{\pi}{2n} \downarrow 0$$