שיעור 07

מבוא להסתברות
הסתברות איחוד מאורעות, הסתברות מותנה
גיא רוזנדורן, 25/05/2008 14:05

הסתברות איחוד מאורעות

בשיעור שעבר ראינו את נוסחת ההכלה ההפרדה.
עבור שני מאורעות:

באופן כללי:

נוכיח את הנוסחה בהוכחה קומבינטורית.

הוכחה קומבינטורית

$\omega \in \cup_{i=1}^{n} A_i$, כלומר ω נמצאת בלפחות אחד מהמאורעות. נניח, למשל, ש ω נמצאת ב- k מהמאורעות $A_1, \dots, A_k$ כאשר $k \geq 1$. בלי הגבלת הכלליות, נניח כי $w \notin A_{k+1}, \dots, A_n$, $w \in A_1, \dots, A_k$.
נראה כי לפי הנוסחה, כל נקודת מדגם נספרת פעם אחד ויחידה.
נסתכל על המחובר הראשון, ω נמצאת k פעמים בתוך $S_1 = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.
בסכום $S_2 = \sum_{i,j} P(A_i \cap A_j)$ ω נמצאת $\binom{k}{2}$ פעמים.
בסכום $S_k = \sum P(A_i \cap \dots \cap A_{i+k})$ ω נמצאת $\binom{k}{k}$ פעמים.
וביתר הסכום ω לא נמצאת.
לכן, אם נשתמש בנוסחא אזי מספר הפעמים ש ω נספרת הוא:

$$\binom{k}{1} - \binom{k}{2} + \binom{k}{3} - \cdots (-1)^{k-1}\binom{k}{k}$$

$$\sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1}\binom{k}{j} = -\sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1}\binom{k}{j} = -\sum_{j=0}^{k} (-1)^{j}\binom{k}{j} + 1$$

אבל:

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^{j}\binom{n}{j} = [-1+1]^{n} = 0$$

ולכן:

$$\sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1}\binom{k}{j} = 0 + 1 = 1$$

שיעור 07

מבוא להסתברות

הסתברות איחוד מאורעות, הסתברות מותנה

גיא רוזנדורן, 25/05/2008 14:05

נחזור לבעיית המזכירה הרשלנית

למזכירה נתנו להדפסה n מכתבים המיועדים ל n אנשים שונים. היא מדפיסה את n המכתבים, מכינה להם n מעטפות מתאימות, אך מכניסה את המכתבים למעטפות באופן מקרי לחלוטין.

תזכורת:

- מכתב שהגיע ליעדו הוא מכתב עם מספר i שנכנס למעטפה עם מספר i.
- נקודה במרחב המדגם היא וקטור של n מעטפות, שלכל מעטפה נכנסים מכתבים ממוספרים שלא חוזרים על עצמם. לכן, $n(\Omega) = n!$.

נגדיר מאורע A שבו לפחות מכתב אחד הגיע ליעדו. כלומר, אפשר להציג את המאורע A באופן הבא: $A = \cup_{i=1}^{n} A_i$ כאשר A_i הוא המאורע שבו המכתב ה i הגיע ליעדו.

לכן, נוכל להשתמש בנוסחא לחישוב $P(A)$.

נסתכל על המאורע שבו רק מכתב אחד ויחיד, כלומר המכתב ה i, הגיע ליעדו. בשלב הראשון הניחו את המכתב ה i במקומו, ובשלב השני פזרו את $(n-1)$ המכתבים הנותרים במקומות לא מתאימים. לכן:

$$P(A_i) = \frac{n(A_i)}{n(\Omega)} = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

אלה מאורעות זרים ולכן סכום ההסתברויות שלהם. נחשב את סכום ההסתברויות שבכל פעם מכתב אחר הגיע ליעדו. נסמן סכום זה ב:

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

היות ומספר המחוברים ב S_1 הוא n:

$$S_1 = n * \left(\frac{1}{n}\right) = 1$$

נסתכל על S_2, כלומר סכום ההסתברויות שבכל ניסוי שני מכתבים הגיעו ליעדם. לפני הנוסחה:

$$S_2 = \sum_{1 \le i < j < n}^{n} P(A_i \cap A_j)$$

$$P(A_i \cap A_j) = \frac{(n-2)!}{n!}$$

מספר המחוברים ב S_2 הוא $\binom{n}{2}$ ולכן:

$$S_2 = \binom{n}{2}\frac{(n-2)!}{n!} = \frac{n!}{2!\,(n-2)!}\frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{2!}$$

ובאופן כללי:

$$S_k = \binom{n}{k}\frac{(n-k)!}{n!} = \frac{1}{k!}$$

בסה"כ נקבל:

$$P(A) = P(\cup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}S_k = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{1}{k!}$$

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{1}{k!}$$

כלומר, ההסתברות המאורע שלפחות מכתב אחד יגיע ליעדו, שהוא איחוד המאורעות ש k מכתבים מתוך n יגיעו ליעדם, היא $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{1}{k!}$.

נסתכל גם על המאורע המשלים של A – המאורע שאף מכתב לא הגיע ליעדו:

$$P(\overline{A})=1-P(A)=1-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{1}{k!}=1+\sum_{k=1}^{n}(1)^{k}\frac{1}{k!}=\sum_{k=0}^{n}(1)^{k}\frac{1}{k!}=1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{(-1)^{n}}{n!}$$

נשים לב, שאם מספר המכתבים שואף לאינסוף, אז ההסתברות שלפחות מכתב אחד יגיע ליעדו:

$$P(\overline{A})=\sum_{k=0}^{n}(1)^{k}\frac{1}{k!}\rightarrow_{(n\rightarrow\infty)}e^{-1}=\frac{1}{e}$$

$$P(A)\rightarrow_{(n\rightarrow\infty)}=1-\frac{1}{e}$$

בעצם, נוכל לחשב גם את ההסתברות שבדיוק k מכתבים מתוך n הגיעו ליעדם בצורה עקיפה:

$$P(\overline{A})=\frac{n(\overline{A})}{n(\Omega)}=\frac{n(\overline{A})}{n!}$$

$$n(\overline{A})=n!\,P(\overline{A})$$

קיבלנו את מספר האפשרויות לפיזור n מהמכתבים במעטפות כך שאף מכתב לא יגיע ליעדו.

עתה נסמן ב P_k^n את ההסתברות שבדיוק k מכתבים מתוך n הגיעו ליעדם, ונסמן ב P_0^{n-k} את ההסתברות שאף מכתב מתוך n-k לא הגיע ליעדו. נסמן ב $n(\overline{A})$ את מספר האפשרויות לפיזור n-k מהמכתבים כך שאף אחד לא יגיע ליעדו. אז לפי החישוב האחרון: $n(\overline{A})=n!*P_0^{n-k}$

נחשב את P_k^n. בשלב הראשון נבחר את k המכתבים מתוך n שהגיעו ליעדם.

בשלב השני נספור מספר הפיזורים של אותם n-k מכתבים שלא הגיעו ליעדם. אז:

אז:

$$P_k^n=\frac{\binom{n}{k}n(\overline{A})}{n!}=\frac{\binom{n}{k}(n-k)!\,P_0^{n-k}}{n!}=\frac{P_0^{n-k}}{k!}$$

נבדוק ונראה שזה אכן נכון:

עבור k=0 התוצאה מתקבלת ישירות, וגם עבור k=n-1: כי הרי לא יכולים להגיע ליעדם רק n-1 מעטפות, שהרי במקרה הזה בהכרח גם המכתב האחרון הגיע ליעדו. לכן, ההסתברות שזה יקרה היא אפס.

עתה נסמן ב Q_n את מספר האפשרויות לפיזור n מכתבים ב n מעטפות כך שאף מכתב לא יגיע ליעדו, ונמצא נוסחא רקורסיבית לחישוב Q_n:

$$Q_1=0\,,\qquad Q_2=1\,,\qquad Q_n=(n-1)[Q_{n-2}+Q_{n-1}]$$

אפשר להראות ש:

$$Q_n=n!\,P_0^n=n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$$

שיעור 07

מבוא להסתברות

הסתברות איחוד מאורעות, הסתברות מותנה

גיא רוזנדורן, 25/05/2008 14:05

סיכום הפרק

ראינו הרבה דוגמאות למרחבי הסתברות סימטריים, וראינו שבעזרת הרבה דוגמאות אפשר לפתור הרבה תרגילים אחרים, בצורה ישירה, או בעזרת פירוק המאורעות לאיחוד מאורעות, זרים או לא זרים.

הסתברות מותנה

דוגמאות

קובייה סימטרית

מטילים קובייה סימטרית. מהי ההסתברות שהופיעה התוצאה "2"?

נסמן מאורע זה A, ואנחנו יודעים ש $P(A)=\frac{1}{6}$.

ידוע כי תוצאת הטלת הקובייה הייתה זוגית (נסמן זה כמאורע B).

לאור המידע הזה, ההסתברות שהופיע "2" היא $\frac{1}{3}$. נסמן זאת בצורה הבאה:

$$P(A|B)=\frac{1}{3}$$

$$B=\{2,4,6\}$$

גברים ונשים

באוכלוסיה מספר שווה של גברים ונשים. ידוע שכל הגברים מעשנים, כל הנשים לא מעשנות. בוחרים פרט מהאוכלוסייה באופן מקרי. הסיכוי שנבחר מעשן הוא $\frac{1}{2}$ (כי חצי מהאוכלוסייה מעשנת). אם ידוע שנבחר גבר, אז הסיכוי שנבחר מעשן הוא כבר לא $1/2$, הוא 1.

מחשבים כאן את ההסתברות של A בתנאי B, כלומר ההסתברות שקרה המאורע A אם ידוע ש-B קרה.

נניח שהמרחב הוא סימטרי, אז $P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}$. לעומת זאת, $P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}$. אז:

$$P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{\frac{n(A\cap B)}{n(\Omega)}}{\frac{n(B)}{n(\Omega)}}=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

הגדרה

יהיו B,A שני מאורעות במרחב הסתברות. ההסתברות המותנה של A בתנאי B, כלומר ההסתברות שקרה המאורע A אם קרה המאורע B, מסומנת ושווה $P(A|B)=P(A\cap B)/P(B)$ ובלבד ש $P(B)>0$.

שיעור 07

מבוא להסתברות

הסתברות איחוד מאורעות, הסתברות מותנה

גיא רוזנדורן, 25/05/2008 14:05

תוכן עניינים

שיעור 07

מבוא להסתברות

הסתברות איחוד מאורעות, הסתברות מותנה

גיא רוזנדורן, 25/05/2008 14:05

תקציר משפטים, נוסחאות והדגשים

יהיו B,A שני מאורעות במרחב הסתברות. ההסתברות המותנה של A בתנאי B, כלומר ההסתברות שקרה המאורע A אם קרה המאורע B, מסומנת ושווה $\boldsymbol{P(A\cap B)/PB}$ = PAB ובלבד ש $\boldsymbol{PB} > \boldsymbol{0}$.