פולינום אופייני

דוגמא

$$f_A(x)=\det\begin{pmatrix}x & -1\\ -2 & x-3\end{pmatrix}=x(x-2)-2=x^2-3x-2$$

$$f_{a(A)}=A^2-3A-2I_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}^2-3\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

פולינום מזערי

תהי מטריצה $A\in M_n(F)$. פולינום $m_1\in F[x]$ נקרא פולינום מזערי A אם הוא מתוקן ובעל מעלה מזערית מכין כל הפולינומים ב $F[x]$ השונים מאפס כך ש $f(1)=0$.

פולינום מזערי קיים והוא יחיד.

הוכחת קיום: ניקח $0\neq f\in F[x]$ כך ש $f(a)=0$ מהמעלה המזערית. אם f לא מתוקן, נחליף אותו ב $c^{-1}f$, כאשר c המקדם העליון של f (כי אז $c^{-1}f(A)=c^{-1}f(A)=c^{-1}0=0$).
הוכחת יחידות: אם $m,m'\in F[x]$ פולינומים מתוקנים, אז $m(A)=m'(A)=0$, שניהם מהמעלה המזערית ביותר, נגיד שזו המעלה k. $(m-m')(A)=m(A)-m'(A)=0$. אבל $\deg(m-m')<k$. לכן, $m-m'=0$.

דוגמאות

ניקח את מטריצת האפס מסדר n: $A\in(0)\in M_n(F)$. אז $f_A=\det(x*I_n-A)=x^n$.
הפולינום המזערי שלה: $m_A=x$.

ניקח את מטריצת היחידה מסדר n: $A\in I\in M_n(F)$. אז $f_a=\det(x*I_n-I)=(x-1)^n$.
הפולינום המזערי שלה: $m_A=x-1$.

משפט

לכל $f\in F[x]$ מתקיים ש $f(A)=0$ אם ורק אם $m_A|f$. בפרט, $m_A|f_a$.
הוכחה: יש $q,r\in F[x]$ יחידים כך ש $\deg r<\deg m_n$ ו $f=m_Aq+r_1$.
לכן: $f(a)=m_1(A)q(A)+r(A)=0+r(A)=r(A)$.
לכן אם $f(A)=0$ אז $r(A)=0$, לכן $r=0$ (לפי המזעריות של $\deg m_A$).
לכן $f=m_Aq$. כלומר, $m_A|f$. אם $m_A|f$ אז $r=0$. לכן $f(A)=r(A)=0$. מש"ל.

משפט

תהי $A\in M_n(F)$. אז $f_A|m_A^n$.
הוכחה: $m_1(x)\in F[x]\subseteq M_n(F)[x]$. $m_A(A)=0$. לכן יש $q(x)\in M_n(F)[x]$ כך ש $m_A(x)=q(x)(x-A)$.

דוגמאות

$$\phi\left(\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 5\\ 6 & 7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & -3\end{pmatrix}x^2\right)=\begin{pmatrix}1-x^2 & 2+5x+2x^2\\ 3+6x & 4+7x-3x^2\end{pmatrix}$$

אז $\phi(m_A(x))=m_A(x)I_n$, $\phi(x-A)=\phi(I_nx-A)=I_nX-A$.
תהי $B=\phi(q(x))\leq M_n(F[x])$ ולכן $m_A(x)I_n=B(I_nX-A)$. $f_A(x)$ $\det B$ $m_A(x)^n=$.

משפט

ל m_A אותם גורמים אי-פריקים ומתוקנים ב $F[x]$. ביתר דיוק, אם $f_A(x) = q_1^{k_1} * \dots * q_r^{k_r}$ כאשר $q_1, \dots, q_r \in F[x]$ אי-פריקים מתוקנים שונים, ו $k \ge 1$ אז $m_A(x) = q_1^{l_1} * \dots q_r^{l_r}$ כאשר $1 \le l_i \le k_i$.

הוכחה: $l_i \le k_i$ בגלל ש- $m_A | f_A$. אבל $q_i | f_A | m_A^n = q_1 k^{l_1 n} * \dots * q_r^{l_1 n}$, לכן יש j כך ש $q_i | q_j^{l_j n}$. מכאן $i = j$. לכן $l_j n \ge 1$, לכן $l_j \ge 1$.

מסקנה

תהי $A \in M_n(F)$, $\lambda \in F$. אז λ ערך עצמי של A אם ורק אם $m_A(\lambda) = 0$.

הוכחה: λ ערך עצמי של A אמ"מ $f_A(\lambda) = 0$, אמ"מ יש i כך ש $q_i(\lambda) = 0$ אמ"מ $m_A(\lambda) = 0$

דוגמא

מהו m_A עבור $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$?

$$f_A = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$

אז $m_A = (x-1)^1$ או $m_A = (x-1)^2$. נבדוק אם $(x-1)^1$ מאפס את המטריצה:

$$(x-1)(A) = A - 1I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ne 0$$

ולכן $m_A = (x-1)^2$.

תרגיל

תהי $A \in M_3(\mathbb{R})$. הוכח: $A^2 \ne -I_3$.

פתרון: נניח שיש A כזו. אז $f(A) = 0$ כאשר $f = x^2 + 1$. נניח שזה ייתכן. אז $m_A | f$.

אבל f אי-פריק, ולכן $m_A = f = x^2 + 1$. בפרט, ל m_A אין שורש ממשי. לכן גם ל f_A אין שורש ממשי.

אבל $f_A \in R[x]$ ממעלה 3 מתוקן, ולכן יש לו שורש. סתירה.

תרגיל 5.18

ב. יש להוכיח: $f_M(x) = f_{A_1}(x) * \dots * f_{A_n}(x)$.

$$f_M = \det(xI - M) = \det \begin{pmatrix} xI - A_1 & -B & \dots & C \\ 0 & xI - A_2 & \dots & D \\ & & \dots & \vdots \\ 0 & & 0 & xI - A_m \end{pmatrix} =$$

לפי סעיף א:

$$\det(xI - A_1) * \dots \det(xI - A_n) = f_{A_1}(x) * \dots * f_{A_2}(x)$$

משפט

תהי $M=\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & A_n \end{pmatrix}$ מטריצת גושים מעל שדה F, באשר $A_1,\dots,A_n$ מטריצות ריבועיות. אז:

$$m_M(x)=\operatorname{lcm}\left(m_{A_1}(x),\dots,m_{A_n}(x)\right)$$

הוכחה: אם $g=\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \in F[x]$, אז:

$$g(M)=\sum_{i=0}^{\infty} a_i M^i=\sum_{i=0}^{\infty} a_i \begin{pmatrix} A_1^i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & A_n^i \end{pmatrix}=\sum_{i=0}^{\infty} \begin{pmatrix} a_i A_1^i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_i A_n^i \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{\infty} a_i A_1^i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \sum_{i=0}^{\infty} a_i A_n^i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} g(A_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & g(A_n) \end{pmatrix}$$

$g(M)=0$ אם ורק אם $g(A_1)=\dots=g(A_n)=0$. כלומר, $m_M|g$, כלומר $m_{A_1}|g,\dots,m_{A_n}|g$,
וזה שקול ל $g|\operatorname{lcm}(m_{A_1},\dots,m_{A_n})$. מכאן g מתוקן ממעלה מזערית שמאפס את M הוא $\operatorname{lcm}(m_{A_1},\dots,m_{A_n})$.

העתקות

יהי V מרחב וקטורי ממימד סופי מעל F, ותהי $T:V\to V$ ליניארית.
הפולינום האופייני של T הוא הפולינום האופייני של $[T]_B^B$ כאשר B בסיס של V.
זה אינו תלוי ב B: אם A בסיס של V אז $[T]_B^B,[T]_A^A$ דומות ולכן יש להן אותו פולינום אופייני.

עבור פולינום $g=\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ מגדירים: $g(T)=\sum_{i=0}^{\infty} a_i T^i=a_0 1_v+a_1 T+a_2 T\circ T+\dots a_3 T\circ T\circ T+\cdots$.
זוהי העתקה ליניארית $g(T):V\to V$.

משפט

$$f_T(T)=0$$

הוכחה:

טענה: יהי B בסיס של V. לכל $g\in F[x]$: $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i=[g(T)]_B^B=g([T]_B^B)$
ההעתקה $[S]_B^B \longmapsto S$ ממרחב ההעתקות למרחב המטריצות הוא איזומורפיזם של מ"ו שומר כפל. לכן:

$$[g(T)]_B^B=[\sum a_i T^i]_B^B=\sum a_i([T]_B^B)^i=g([T]_B^B)$$

יהי B בסיס של V אז:

$$[f_T(T)]_B^B=f_t([T]_B^B)=f_{[T]_B^B}([T]_B^B)=0$$

לכן, $[S]_B^B \to S$ חח"ע, ועל $f_T(T)=0$. מש"ל.

תוכן עניינים

תקציר משפטים, נוסחאות והדגשים

תהי מטריצה $A \in Mn(F)$. פולינום $m1 \in Fx$ נקרא פולינום מזערי A אם הוא מתוקן ובעל מעלה מזערית מכין כל הפולינומים ב $F[x]$ השונים מאפס כך ש $f1 = 0$.

פולינום מזערי קיים והוא יחיד.

לכל $f \in Fx$ מתקיים ש $fA = 0$ אם ורק אם $\boldsymbol{mA|f}$. בפרט, $mA|fa$.

תהי $A \in Mn(F)$. אז $fA|mAn$.

ל mA אותם גורמים אי-פריקים ומתוקנים ב Fx.ביתר דיוק, אם $fAx = q1k1 * \ldots * qrkr$ באשר $q1, \ldots, qr \in$ $F[x]$ אי-פריקים מתוקנים שונים, ו $1 \geq k$ אז $mAx = q1l1 * \ldots qrlr$ באשר $\boldsymbol{1 \leq li \leq ki}$.

תהי $A \in Mn(F)$, $\lambda \in F$. אז λ ערך עצמי של A אם ורק אם $mA\lambda = 0$.

יהי V מרחב וקטורי ממימד סופי מעל F, ותהי $\mathrm{T: V \rightarrow V}$ ליניארית.

הפולינום האופייני של T הוא הפולינום האופייני של $\boldsymbol{TBB}$ כאשר B בסיס של V.

זה אינו תלוי ב :B אם A בסיס של V אז $\boldsymbol{TBB}, \boldsymbol{TAA}$ דומות ולכן יש להן אותו פולינום אופייני.