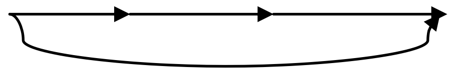
# שיעור 08

מתמטיקה בדידה
יחסים בתוך קבוצה
גיא רוזנדורן, 26/05/2008 17:06

## יחסים בתוך קבוצה

***יחס S ב A ייקרא טרנזיטיבי אם ורק אם*** $\forall a,b,c \in A. aSb \wedge bSc \Rightarrow aSc$.
בדיאגראמה, כל מסילה המורכבת משניים (או יותר) חיצים מגובה גם ע"י חץ ישיר.



***יחס S הוא טרנזיטיבי אם ורק אם*** $S \circ S \subseteq S$.

## תובנות

- היחס ההופכי ל "<" הוא "≥".
- היחס ההופכי ל "=" הוא "=", זהו יחס טרנזיטיבי
- יחס ב R הוא קבוצה חלקית על המישור ב R.

## דוגמאות

- $<$
- $>$
- $\leq$
- $\geq$

האם היחס הבא טרנזיטיבי או לא?
היחס $A \rightarrow B \quad C \rightarrow D$? כן! היחס טרנזיטיבי כי אין מסילה באורך 2, ולכן הגרירה בסדר.
היחס $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$? לא! כי הוא לא מגובה ע"י חץ ישיר.
האם הרכבת יחסים טרנזיטיביים היא יחס טרנזיטיבי? התשובה היא לא! נסתכל על הדוגמא:

$$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E$$
$$A \rightarrow\rightarrow\rightarrow \; C \; \rightarrow\rightarrow\rightarrow E$$

היחס הכחול והיחס האדום הוא טרנזיטיבי על ריק, אבל ההרכבה (היחס הירוק) לא טרנזיטיבית

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \rightarrow & B & \rightarrow & C & \rightarrow & D & \rightarrow & E \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ & F & & G & & H & & I & \end{array}$$
$$A \rightarrow\rightarrow\rightarrow \; C \; \rightarrow\rightarrow\rightarrow E$$

היחס הכחול והיחס האדום הוא טרנזיטיבי, אבל ההרכבה (היחס הירוק) לא טרנזיטיבית.

## רפלקסיביות

***יחס ב A הוא רפלקסיבי ב A אם ורק אם*** $\forall a \in A \;\; aSa$.
בדיאגראמה, יחס רפלקסיבי יש חץ לולאה לכל איבר.

# שיעור 08

מתמטיקה בדידה

יחסים בתוך קבוצה

גיא רוזנדורן, 26/05/2008 17:06

## תרגיל

כנגד כל תת קבוצה של {טרנזיטיבי, רפלקסיבי, סימטרי } הצג יחס "טבעי" ב $\mathbb{R}$ המקיים את תכונות התת-קבוצה ולא את האחרות.

| סימטרי | טרנזיטיבי | רפלקסיבי | $< x,y > \mid \ldots$ |
|---|---|---|---|
| V | V | V | $x = y$ |
| | V | V | $x \geq y$ |
| V | | V | $\lvert x - y \rvert < 1$ |
| | | V | $x - y < 1$ |
| V | V | | |
| | V | | להשלים |
| V | | | להשלים |
| | | | להשלים |

## משפט

יחס סימטרי וטרנזיטיבי הוא בהכרח גם רפלקסיבי:

~~יהי $< a,b >$ ביחס S סימטרי וטרנזיטיבי. מהסימטריה גם $< b.a >\in S$ ומטרנזיטיביות גם $< a,a >\in S$.~~

משהו לא בסדר בהוכחה, נתקן:

S יחס טרנזיטיבי וסימטרי

הנחה $< a,b >\in S$

...

$< a,a >\in S$

$< a,b >\in S \Rightarrow < a,a > S$

$\forall < a,b. < a,b > \Rightarrow < a,a > S$

## יחס שקילויות

***יחס S בקבוצה A שהוא סימטרי, טרנזיטיבי ורפלקסיבי ייקרא יחס שקילויות.***

## דוגמאות

- "=" (בכל תורה עם שוויון)
- דמיון משולשים
- חפיפת משולשים
- A*A
- להיות או פרי או ירק בירקניה של איציק
- לחלוק תכונה נתונה משותפת

# שיעור 08

מתמטיקה בדידה
יחסים בתוך קבוצה
גיא רוזנדורן, 26/05/2008 17:06

## יחס חלוקה

***חלוקה של קבוצה A היא משפחת תת-קבוצות לא ריקות של A, שכל איבר של A שייך בדיוק לאחת מהן. פורמאלית: חלוקה של A היא $P \subseteq P(A)$ המקיימת:***

$(a)\ \forall M \in P.M \neq \emptyset$

$(b)\ \ \forall a \in A.\exists M \in P.a \in M$

$(c)\ \ \forall M_1, M_2 \in P.M_1 \cap M_2 \neq \emptyset \Rightarrow M_1 = M_2$

## משפט החלוקות

***תהי חלוקה P של קבוצה A. נגדיר יחס S (השמורה ע"י P) כלהלן: $aSb \Leftrightarrow \exists m \in P.a \in M \wedge b \in M$. S הוא יחס שקילות. מצד שני, כל יחס שקילות S ב A, מגדיר חלוקה של A המסומנת $A/S$ ונקראת קבוצה המנה של A ע"י S***

הנבנית כלהלן: לכל a מתוך A נגדיר את מחלקת השקילות של $[a]_S$ ע"י: $[a]_S = \{b|aSb\}$.

המנה $A/S$ מוגדרת ע"י $A/S = \{[a]_s|a \in A\}$.

קבוצת מחלקות השקילות $A/S$ היא חלוקה המשרה את היחס S.

## דוגמאות

- A*A משרה את: $A/(A * A) = \{A\}$.
- השוויון משרה את $\{\{a\}|a \in A\}$

## תוכן עניינים

**No table of contents entries found.**

## תקציר משפטים, נוסחאות והדגשים

יחס S ב A ייקרא טרנזיטיבי אם ורק אם $\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \boldsymbol{A} . \boldsymbol{aSb} \wedge \boldsymbol{bSc} \Rightarrow \boldsymbol{aSc}$.
יחס S הוא טרנזיטיבי אם ורק אם $\boldsymbol{S} \circ \boldsymbol{S} \subseteq \boldsymbol{S}$.
יחס ב A הוא רפלקסיבי ב A אם ורק אם $\forall a \in A \;\; aSa$.
יחס S בקבוצה A שהוא סימטרי, טרנזיטיבי ורפלקסיבי ייקרא יחס שקילויות.
חלוקה של קבוצה A היא משפחת תת-קבוצות לא ריקות של A, שכל איבר של A שייך בדיוק לאחת מהן. פורמאלית: חלוקה של A היא $P \subseteq P(A)$ המקיימת:
$b \;\; \forall a \in A . \exists M \in P . a \in M \;\; c \;\; \forall M1, M2 \in P . M1 \cap M2 \neq \emptyset \Rightarrow M1 = M2 \;\; a \, \forall M \in P . M \neq \emptyset$
תהי חלוקת P של קבוצה A. נגדיר יחס S (השמורה ע"י P) כלהלן: $aSb \Leftrightarrow \exists m \in P . a \in M \wedge b \in M$.
S הוא יחס שקילות. מצד שני, כל יחס שקילות S ב A, מגדיר חלוקה של A המסומנת $A/S$ ונקראת קבוצה המנה של A ע"י S