שיעור 08

מבוא להסתברות

הסתברות מותנה, נוסחת הכפל, נוסחת ההסתברות השלמה

גיא רוזנדורן, 28/05/2008 14:06

הסתברות מותנה

הגדרה

בהינתן שני מאורעות B,A בתוך איזשהו מרחב הסתברות, מגדירים את ההסתברות ש B קרה כאשר ידוע שמאורע A קרה באופן הבא:

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}$$

בהינתן מאורע B בשדה המאורעות, רוצים לחשב את ההסתברות של B.

אפריורי, במצב מראש, כאשר אין שום מידע נוסף, ההסתברות של B נתונה ע"י $\mathrm{P(B)}$.

אפוסטריורי, לאחר מעשה, אם ידוע שקרה המאורע A, מעדכנים את ההסתברות של B: והיא $\mathrm{P(B|A)}$.

ההסתברות המותנה $P(B|A)$ המוגדרת לכל מאורע B בשדה המאורעות, מקיימת את כל הדרישות מפונקציית הסתברות:

1. לכל מאורע B, ההסתברות המותנה היא מספר ממשי אי-שלילי: $P(B|A)\geq 0$.
2. $P(\Omega|A)=\frac{P(\Omega\cap A)}{P(A)}=\frac{P(A)}{P(A)}=1$
3. אדיטיביות עד כדי מניה. כלומר, אם $B_1,.B_2,\ldots$ הם מאורעות זרים בזוגות, אזי $P(\cup_{i=1}^{\infty}B_i|A)=\sum_{i=1}^{\infty}P(B_i|A)$. הוכחה:

$$P(\cup_{i=1}^{\infty}B_i|A)=\frac{P\left((\cup_{i=1}^{\infty}B_i)\cap A\right)}{P(A)}=\frac{P(\cup_{i=1}^{\infty}(B_i\cap A))}{P(A)}=\frac{\sum_{i=1}^{\infty}P(B_i\cap A)}{P(A)}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{P(B_i\cap A)}{P(A)}=\sum_{i=1}^{\infty}P(B_i|A)$$

דוגמאות

מטבע סימטרי

מטילים מטבע סימטרי n פעמים. הופיעו בדיוק k "עצים" מתוך n ההטלות.

מהי ההסתברות שהטלה הראשונה הופיע "עץ"?

נסמן ב B את המאורע: בהטלה הראשונה הופיע "עץ"

נסמן ב A_k את המאורע: מספר ה-"עצים" ב n ההטלות היה בדיוק k.

אפריורי, ההסתברות של B היא $P(B)=1/2$ כי נאמר שהמטבע סימטרי.

רוצים לחשב את ההסתברות של B כאשר ידוע שהמאורע A_k קרה.

כלומר, רוצים לחשב את $P(B|A_k)$:

$$P(B|A_k)=\frac{P(B\cap A_k)}{P(A_k)}$$

נחשב עכשיו גם את המונה וגם את המכנה לפי ההנחה שהמטבע הוא סימטרי:

נקודה במרחב המדגם היא וקטור באורך n של תוצאות שוות הסתברות. אז $P(\Omega)=2^n$

במאורע A_k בוחרים k מקומות ל-"עצים" מתוך כל ההטלות. אז $|A_k|=\binom{n}{k}$

במאורע B הופיע "עץ" בהטלה הראשונה, אז בוחרים k-1 מקומות מתוך n-1 הטלות. אז: $|B|=\binom{n-1}{k-1}$

$$P(A_k)=\frac{\binom{n}{k}}{2^n}\ ,\qquad P(B\cap A_k)=\frac{\binom{n-1}{k-1}}{2^n},\ \ B\subset a_k\Leftrightarrow B=B\cap A_K$$

אז קיבלנו:

$$P(B|A_k)=\frac{P(B\cap A_k)}{P(A_k)}=\binom{n-1}{k-1}\Big/\binom{n}{k}=\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!}\Big/\frac{n!}{k!\,(n-k)!}=\frac{k}{n}$$

שיעור 08

מבוא להסתברות

הסתברות מותנה, נוסחת הכפל, נוסחת ההסתברות השלמה

גיא רוזנדורן, 28/05/2008 14:06

לידה

הסיכוי שבלידה מסוימת יוולד בן זכר הוא $1/2$.
מתבוננים במשפחות שיש להם שני ילדים. ידוע שאחד הילדים הוא בן.
מה הסיכוי שהילד הנוסף הוא בן זכר?

מרחב המדגם הוא המשפחות שיש להן שני ילדים: $\Omega = \{(\text{בן,בן}),(\text{בן,בת}),(\text{בת,בן}),(\text{בת,בת})\}$.
לכל אחד מארבעת התוצאות יש הסתברות שווה $(1/4)$ ולכן זהו מרחב הסתברות סימטרי.
ידוע שקרה המאורע A: אחד הילדים הוא בן. אז $A = \{(\text{בן,בן}),(\text{בן,בת}),(\text{בת,בן})\}$.
גם מרחב ההסתברות במאורע A הוא סימטרי, ולכל תוצאה הסתברות של $(1/3)$.
במאורע B קרה: שני הילדים הם בנים. אז $B = \{(\text{בן,בן})\}$ ולכן $B \cap A = \{(\text{בן,בן})\}$.
אז:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

קלפים

מוציאים באופן אקראי שני קלפים ללא החזרה מחפיסה סטנדרטית (52 קלפים).
א. מה ההסתברות שהקלף השני שהוצא הוא מסוג "לב? מאורעB
ב. מה ההסתברות שהקלף השני הוא מסוג "לב", אם ידוע שהראשון הוא מסוג "לב"?
החלק הראשון זו הסתברות רגילה, החלק השני זו הסתברות מותנה, ודווקא אותה יותר קל לחשב.
נסמן מאורע A כמאורע שבו הקלף הראשון הוא A. אז $P(A) = \frac{13}{52}$. מתוך זה קל לחשב את B:
אם הקלף הראשון הוא לב, אז נשארו 12 קלפי "לב" מתוך 51, אז: $P(B|A) = \frac{12}{51}$.
עכשיו נחשב את הסתברות המאורע B, שבו הקלף השני מסוג לב:
בשליפה הראשונה יש 52 קלפים אפשריים, בשליפה השנייה יש 51 קלפים. אז $|\Omega| = 52 * 51$.
בשלה הראשון של הניסוי צריך לבחור "לב", אז יש 13 אפשרויות. בשלב השני אפשר לבחור כל קלף חוץ מאותו "לב" שנבחר. יש 51 אפשרויות. אז:

$$P(B) = \frac{51 * 13}{52 * 51} = \frac{13}{52}$$

מה שהדוגמא הזו באה להראות זה שבהרבה פעמים נוח יותר לחשב את ההסתברות המותנה.

נוסחת הכפל

לפי ההגדרה של ההסתברות המותנה:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

לפעמים קל יותר לחשב את $P(B|A)$ קודם. אז:

$$P(B \cap A) = P(A)P(B|A)$$

במאורע תלת-שלבי, שבשלב הראשון קרה A, בשני B ובשלישי C, נחשב:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B|A)P(C|A \cap B)$$

נוסחת הכפל, באופן כללי:

$$P(\cap_{i=1}^{n} A_i)P(A_1)P(A_2|A_!)P(A_3|A_2 \cap A_1) * \ldots * P(A_n| \cap_{i=1}^{n-1} A_i)$$

שיעור 08

מבוא להסתברות

הסתברות מותנה, נוסחת הכפל, נוסחת ההסתברות השלמה

גיא רוזנדרון, 28/05/2008 14:06

דוגמאות

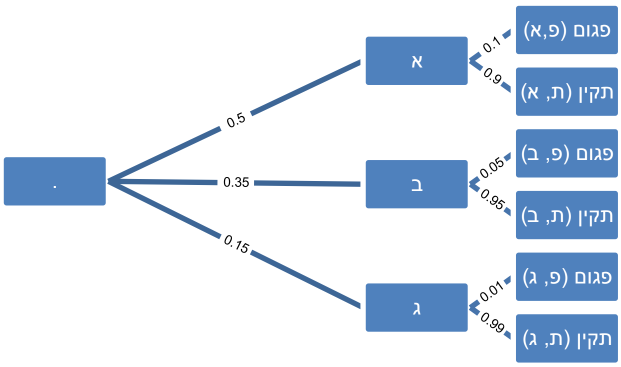
כדורים

בכד יש 10 כדורים אדומים ו-5 לבנים. מוציאים בזה אחר זה (ללא החזרה) שלושה כדורים.
מהי ההסתברות להוציא בסדר זה כדור אדום, לבן, אדום?
קל מאוד לחשב את ההסתברות הזו דרך נוסחת הכפל:
נסמן מאורעות: A_1 הראשון אדום, A_2 השני לבן, A_3 השלישי אדום:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_2 \cap A_1) = \frac{10}{15} * \frac{5}{14} * \frac{9}{13}$$

מכונות

שלוש מכונות מייצרות אותם מוצרים בבית חרושת. מכונה א' מייצרת 50% מהמוצרים, ומתוכם 10% פגומים. מכונה ב' מייצרת 35% מהמוצרים, ומתוכם 5% פגומים. מכונה ג' מייצרת 15% מהמוצרים, ומתוכם 1% פגומים. מהו אחוז המוצרים הפגומים המיוצרים בבית החרושת?
או בניסוח הסתברותי: יוצא בקבוק מבית החרושת, מהו הסיכוי שהבקבוק פגום?
נעשה תרשים עץ שממחיש את מה שקורה בבית החרושת:



6 בקבוקים יכולים לצאת מבית החרושת, והסתברות כל אפשרות היא מכפלת ההסתברויות בדרך:

$$(\text{פ,א}) = 0.5 * 0.1 = 0.05\,,(\text{ת,א}) = 0.5 * 0.9 = 0.45\,,(\text{פ,ב}) = 0.35 * 0.05 = 0.0175$$

$$(\text{ת,ב}) = 0.35 * 0.95 = 0.3325\,,(\text{פ,ג}) = 0.15 * 0.01 = 0.0015\,,(\text{ת,ג}) = 0.15 * 0.99 = 0.1485$$

נסמן ב B את המאורע שהמוצר שנוצר הוא פגום. אז:

$$P(B) = 0.05 + 0.0175 + 0.0015$$

פורמאלית:
נסמן מאורע B שהמוצר שנוצר הוא פגום, מאורע A_i הוא המוצר שנוצר ע"י מכונה מספר i
ידוע כי A_1, A_2, A_3 הם מאורעות זרים, והם כוללים את כל האפשרויות: $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \Omega$
ידועים ההסתברויות הבאות: $P(B|A_1), P(B|A_2), P(B|A_3)$. לא ידוע ההסתברות של מאורע $P(B)$. אז:

$$B = B \cap \Omega = B \cap (A_1 \cup A_2 \cup A_3) = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup (B \cap A_3) = \sum_{i=1}^{3} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{3} P(B|A_i)P(A_o)$$

הנוסחה הסופית שמתקבלת: $P(B) = \sum_{i=1}^{3} P(B|A_i)P(A_i)$ נקראת נוסחת ההסתברות השלמה.

נוסחת ההסתברות השלמה

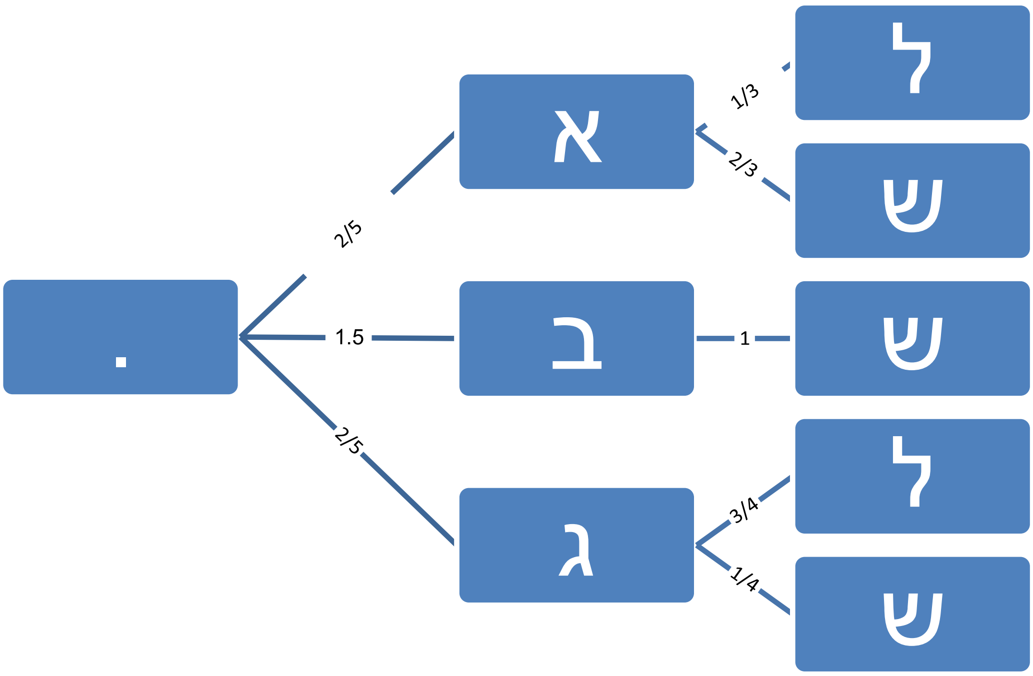
יהי $A_1, A_2, \dots, A_n$ מאורעות זרים בזוגות, שאיחודם הוא כל מרחב המדגם. כלומר, $\cup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$.
לכל מאורע B, נחשב את ההסתברות בעזרת נוסחת ההסתברות השלמה:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)$$

דוגמאות

כדורים

נתונים 5 כדים. ב-2 כדים יש 2 כדורים שחורים ו-1 לבן. בכד אחד יש 10 כדורים שחורים. ב-2 כדים יש כדור 1 שחור ו-3 לבנים. בוחרים כד באופן מקרי ומוציאים ממנו כדור אחד. מהי ההסתברות שהוא לבן?
הדרך הכי פשוטה לפתור שאלה מסוג זה היא לצייר תרשים עץ:
נסמן בסוג (א) את כדים שיש בהם 2 כדורים שחורים ו-1 לבן, בסוג (ב) את הכדים שבהם 10 כדורים שחורים, ובסוג (ג) את הכדים שבהם כדור 1 שחור ו-3 לבנים. אז תרשים העץ:



לניסוי יש 5 תוצאות, והסתברות כל אפשרות היא מכפלת ההסתברויות בדרך. אז:

$$1 = \frac{2}{5} * \frac{1}{3} + \frac{2}{5} * \frac{2}{3} + \frac{1}{5} + \frac{2}{5} * \frac{3}{4} + \frac{2}{5} * \frac{1}{4}$$

נסמן ב B את ההסתברות שנמצא כדור לבן. אז:

$$P(B) = \frac{2}{5} * \frac{1}{3} + \frac{2}{5} * \frac{3}{4}$$

עוד כדים

נתונים $(n+1)$ כדים ובתוכם כדורים. בכד 1 יש: n כדורים שחורים. בכד 2 יש: $(n-1)$ כדורים שחורים וכדור 1 לבן... בכד 3 יש: $(n-2)$ כדורים שחורים ו-2 כדורים לבנים. בכד $(n+1)$ יש: n כדורים לבנים.
בוחרים כד באופן מקרי ומוצאים ממנו כדור. מהי ההסתברות שהכדור שהוצא הוא לבן:
נסמן במאורע B את המאורע שבו הכדור שהוצא הוא לבן.
נסמן במאורע A_i את המאורע שבו הכדור הוצא מכד מספר i. המאורעות A_i זרים בזוגות ואיחודם Ω.
נשתמש בנוסחת ההסתברות השלמה:

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n+1}P(B|A_i)P(A_i)$$

נחשב כל אחד מהמרכיבים בנוסחה:

$$P(A_i)=\frac{1}{n+1}$$
$$P(B|A_i)=\frac{i-1}{n}$$

אז:

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n+1}P(B|A_i)P(A_i)=\sum_{i=1}^{n+1}\frac{i-1}{n}*\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n+1}(i-1)=\frac{1}{n(n+1)}(1+2+\cdots n)$$
$$=\frac{1}{n(n+1)}*\frac{n(n+1)}{2}=\frac{1}{2}$$

יש פה משהו מיוחד בנתונים שעושה את הסימטריה.
בכל כד יש אותו מספר כדורים. אז בסה"כ בכל הכדים יש $n(n+1)$ כדורים. לכל כדור במערכת הזו יש סיכוי של $\frac{1}{n+1}$ לצאת. מתוך כל הכדורים, יש חצי שחורים וחצי לבנים, ולכן ההסתברות היא חצי.

שיעור 08

מבוא להסתברות

הסתברות מותנה, נוסחת הכפל, נוסחת ההסתברות השלמה

גיא רוזנדורן, 28/05/2008 14:06

תוכן עניינים

שיעור 08

מבוא להסתברות

הסתברות מותנה, נוסחת הכפל, נוסחת ההסתברות השלמה

גיא רוזנדורן, 28/05/2008 14:06

תקציר משפטים, נוסחאות והדגשים

בהינתן שני מאורעות B,A בתוך איזשהו מרחב הסתברות, מגדירים את ההסתברות ש B קרה כאשר ידוע שמאורע A קרה באופן הבא:

$$PBA = PB \cap APA$$

נוסחת הכפל, באופן כללי:

$$P \cap i = 1nAiPA1PA2A!\,PA3A2 \cap A1 * \dots * P(An| \cap i = 1n - 1Ai)$$

יהיו $A1, A2, \dots, An$ מאורעות זרים בזוגות, שאיחודם הוא כל מרחב המדגם. כלומר, $\cup\, i = 1nAi = \Omega$.

לכל מאורע B, נחשב את ההסתברות בעזרת נוסחת ההסתברות השלמה:

$$PB = i = 1nPBAiPAi$$