

## העתקות ופולינום אופייני

### הריבוי האלגברי

תהי  $g$  ערך עצמי של  $T$ . הריבוי האלגברי של  $g$  הוא החזקה  $k$  כך ש  $(x - \lambda)^k$  מופיע בפירוק של הפולינום האופייני  $f_T(x)$  לחזקות של גורמים אי-פריקים שונים.

### הריבוי הגיאומטרי

הריבוי הגיאומטרי הוא המימד  $\dim(V_\lambda)$ , כאשר  $V_\lambda = \{v \in V | T(v) = \lambda v\}$

### תרגיל

הריבוי הגיאומטרי לא גדול (קטן או שווה) מהריבוי האלגברי. הוכחה:

יהי  $r$  המימד של  $V_\lambda$ , כלומר הריבוי הגיאומטרי. ניקח בסיס של  $V_\lambda$  עם  $r$  איברים, ונשלים אותו לבסיס של  $V$ . אז  $r = \dim(V_\lambda)$ ,  $B = \{v_1, \dots, v_r, w_1, \dots, w_s\} : \dim(V) = r + s + n$

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \\ 0 & \ddots & 0 & * \\ 0 & 0 & \lambda & \\ 0 & & & * \end{pmatrix}$$

לכן:

$$f_T = f_{[T]_B} = \det \begin{vmatrix} x - \lambda & 0 & 0 & \\ 0 & \ddots & 0 & * \\ 0 & 0 & x - \lambda & \\ 0 & & & * \end{vmatrix} = (x - \lambda)^r g(x)$$

כאשר  $g(x) \in F(x)$  ממעלה  $s$ .

לכן  $(x - \lambda)$  מופיע בפירוק של  $f_T$  לפחות  $r$  פעמים (אולי יותר).

### משפט

ל  $T$  יש הצגה אלכסונית אם ורק אם:

- א.  $f_T$  הוא מכפלה של גורמים ממעלה 1:  $f_T = \prod_{i=1}^r (x - \lambda_i)^{n_i}$  כאשר  $\lambda_i \in F$  שונים
- ב. הריבוי הגיאומטרי של כל ערך עצמי  $\lambda_i$  של  $T$  שווה לריבוי האלגברי שלו.

הוכחה:

יהיו  $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in F$  הערכים העצמיים השונים של  $T$ . יהי  $n_i$  הריבוי האלגברי של  $\lambda_i$ , ו  $k_i$  הריבוי הגיאומטרי.  $n = \dim V$  והפולינום האופייני הוא  $f_T = (x - \lambda_i)^{n_i} g(x)$ . תהי  $B$  קבוצה בלתי תלויה ליניארית מקסימאלית של וקטורים עצמיים של  $T$ . אז  $B = \cup_{i=1}^r B_i$  כאשר  $B_i = B \cap V_{\lambda_i}$ . אז:

$$|B| = \sum_{i=1}^r |B_i| \leq \sum_{i=1}^r \dim V_{\lambda_i} = \sum_{i=1}^r k_i \leq \sum_{i=1}^r n_i = \deg \prod_{i=1}^r (x - \lambda_i)^{n_i} \leq \deg \prod_{i=1}^r (x - \lambda_i)^{n_i} + \deg g(x) = \deg f_T = n = \dim V$$

כיוון  $\Rightarrow$ : נראה של- $T$  יש הצגה אלכסונית כשהתנאי מתקיים:

אז  $g(x) = 1$  ולכן  $\deg g(x) = 0$ , וגם  $k_i = n_i$ . אם ניקח בסיס  $B_i$  של  $V_{\lambda_i}$  וניקח  $B = \cup_{i=1}^r B_i$  אז נקבל קבוצה בת"ל של ו"ע בעלת  $\sum_{i=1}^r k_i = \sum_{i=1}^r n_i = n = \dim V$  של  $T$  יש הצגה אלכסונית. כיוון  $\Leftarrow$ :

אז יש בסיס  $B$  של  $V$  שמורכב מ-ו"ע. לכן  $|B| = n$ . אז יש שוויון בכל מקום בחישוב לעיל. אז לפי  $f_T = (\prod_{i=1}^r (x - \lambda_i)^{n_i}) g(x)$ , כלומר  $\deg g = 0$ ,  $g = 1$ , ומכאן  $k_i = n_i$  (כי  $k_i \leq n_i$ ).

## שיעור 08

אלגברה ליניארית 2

העתקות ופולינומים, ריבוי אלגברי, ריבוי גיאומטרי, תת-מרחב אינווריאנטי  
08:05 29/05/2008, רונדורן

### פולינום מזערי להעתקה

**פולינום**  $m_T(x) \in F[x]$  נקרא **פולינום מזערי של T** אם הוא מתוקן ובעל בעלה מזערית מבין כל הפולינומים  $g(x) \in F[x]$  שמקיימים  $g(T) = 0$ , כלומר שמאפסים את T.

### משפט

יהי B בסיס של V. תהי  $C = [T]_B^B$  אז  $m_T = m_C$

הוכחה:

הי  $f \in F[x]$  פולינום כלשהו. אז  $[f(T)]_B^B = f([T]_B^B)$ .  $F(T) = 0$  אם"מ  $[f(T)]_B^B = 0$  אם"מ  $f(C) = 0$ .

### משפט

**מטריצה**  $A \in M_n(F)$  דומה למטריצה משולשית עליונה C אם ורק אם הפולינום האופייני מורכב ממכפלה של גורמים ממעלה 1 לא בהכרח שונים:  $f_A(x) = \prod_{i=1}^n (x - \lambda_i)$ .  
תנאי זה נכון תמיד אם  $F = \mathbb{C}$  ולכל שדה סגור אלגברית.

כיוון  $\Leftarrow$ :

$$f_A(x) = f_C(x) = \det \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^n (x - \lambda_i)$$

כיוון  $\Rightarrow$ : באינדוקציה על n:

עבור  $n = 1$ : אם  $n = 1$  אז  $A = (a)$  משולשית.

נניח  $n > 1$ : אז  $f_A(\lambda_1) = 0$  ולכן  $\lambda_1$  ערך עצמי ולכן יש  $v_1$  וקטור עצמי שונה מאפס כך  $Av_1 = \lambda_1 v_1$ . נשלים את  $v_1$  לבסיס:  $v_1, \dots, v_n \in F^n$ , ונסמן  $Q = (v_1 \dots v_n) \in M_n(F)$  המטריצה שהוקטורים הם העמודות שלה. אז  $Q$  הפיכה. מתקיים  $Qe_1 = v_1$  ולכן  $Q^{-1}v_1 = e_1$ . אז:

$$Q^{-1}AQ = Q^{-1}A(v_1 \dots v_n) = Q^{-1}(Av_1 \dots Av_n) = Q^{-1}(\lambda_1 v_1 \dots *) = (\lambda_1 e_1 \dots *) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

באשר  $A_1 \in M_{n-1}(F)$ . אז:  $f_{A_1}(x) = f_{Q^{-1}AQ}(x) = (x - \lambda_1)f_A(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \dots (x - \lambda_n)$ .  
לכן  $f_{A_1}(x) = (x - \lambda_2) \dots (x - \lambda_n)$ .

לפי הנחת האינדוקציה יש מטריצה הפיכה  $Q_1 \in M_{n-1}(F)$  כך ש:  $Q_1^{-1}A_1Q_1 = \begin{pmatrix} \lambda_2 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

נגדיר מטריצה  $Q_2$  ונראה שהיא הפיכה:

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & * & \dots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & Q_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \in M_n(F), \quad Q_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & * & \dots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & Q_1^{-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \quad Q_2 * Q_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & * & \dots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & I_{n-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = I_n$$

תהי  $P = Q_1Q_2$  הפיכה ומתקיים:

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= Q_2^{-1}(Q_1^{-1}AQ_1)Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & * & \dots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & Q_1^{-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & * & \dots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & Q_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & * & \dots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & Q_1^{-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_1Q_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & Q_1^{-1}A_1Q_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

## שיעור 08

אלגברה ליניארית 2

העתקות ופולינומים, ריבוי אלגברי, ריבוי גיאומטרי, תת-מרחב אינווריאנטי  
גיא רוזנדורן, 29/05/2008, 08:05

### מסקנה

יהי  $V$  מרחב וקטורי ממימד  $n$  מעל שדה  $F$ . תהי העתקה ליניארית  $T: V \rightarrow V$ . אז קיים בסיס  $B$  של  $V$  כך שמטריצה  $[T]_B^B$  משולשית עליונה אם ורק אם  $f_T(x) = (x - \lambda_1) * \dots * (x - \lambda_n)$ .

הוכחה:

יהי  $A$  בסיס כלשהו של  $V$ . תהי  $A = [T]_A^A$ . אז  $f_T = f_A$ . מתקיים: יש בסיס  $B$  כך ש  $[T]_B^B$  אלכסונית אם ורק אם היא דומה ל  $A$ , ולפי משפט אם ורק אם  $f_T = f_A = (x - \lambda_1) * \dots * (x - \lambda_n)$ .

### תת-מרחב אינווריאנטי

יהי  $V$  מרחב וקטורי מעל שדה  $F$ , תהי העתקה ליניארית  $T: V \rightarrow V$ .  
תת-מרחב  $W$  של  $V$  נקרא אינווריאנטי אם  $T(W) \subseteq W$ , כלומר  $T(w) \in W$  לכל  $w \in W$ .  
הצמצום של  $T$  ל  $W$ , כלומר, ההעתקה  $T': W \rightarrow W$  המוגדרת ע"י  $T'(w) = T(w)$  היא גם ליניארית.  
היא תסומן  $T|_W$ .

### דוגמאות

א.  $0 = \{0\}, V$  הם תמיד תתי-מרחב אינווריאנטיים.  
ב. אם  $\lambda$  ערך עצמי של  $T$ , אז  $V_\lambda$  הוא תת-מרחב אינווריאנטי של  $T$  כי לכל  $w \in V_\lambda$   $T(w) = \lambda w \in V_\lambda$ .  
ואפילו כל תת-מרחב  $W$  של  $V_\lambda$  הוא אינווריאנטי: לכל  $w \in W$  מתקיים  $T(w) = \lambda w \in W$ .  
ג. תהי העתקה ליניארית  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  הסיבוב בזווית  $\theta$  סביב ציר ה- $z$ . אז  $Sp(e_3)$  - ציר ה- $z$  הוא אינווריאנטי וגם  $Sp(e_1, e_2)$  - מישור ה- $(x, y)$  אינווריאנטי.

### תרגיל

תהינה שתי העתקות ליניאריות  $T, S: V \rightarrow V$  כך ש  $T \circ S = S \circ T$  אז  $Im S, \ker S$  הם אינווריאנטיים- $T$ .  
הוכחה:

יהי  $v \in \ker S$  אז  $T(S(v)) = T(0) = 0$  ולכן  $S(T(v)) \in \ker S$ .  
יהי  $w \in Im S$  אז  $w = S(v)$  אז  $T(w) = T(S(v)) = S(T(v)) \in Im S$ .  
מקרה פרטי של התרגיל: אם  $f, g \in F[x]$  אז:  $f(T) \circ g(T) = (fg)(T) = (gf)(T) = g(T) \circ f(T)$ .  
מקרה פרטי כאשר  $g = x$ :  $f(T) \circ T = T \circ f(T)$ .

### מסקנה

יהי  $f \in F[x]$  אז  $Im f(T), \ker f(T)$  הם אינווריאנטיים- $T$ .

### סכום ישר

יהי  $V$  מרחב וקטורי,  $W_1, \dots, W_r$  תת-מרחב של  $V$ . נאמר ש- $V$  סכום ישר של  $W_1, \dots, W_r$  וכותבים  $v = w_1 + \dots + w_r$ ,  $w_i \in W_i$ ,  $W_i \in W_r$ : יש הצגה אחת ויחידה:

### משפט

$V$  מרחב וקטורי,  $W_1, \dots, W_r$  תת-מרחב. לכל  $i$  יהי  $B_i$  בסיס של  $W_i$ . אז  $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_r$  אם ורק אם  $B_1 \oplus \dots \oplus B_r$  בסיס של  $V$ .

## שיעור 08

אלגברה ליניארית 2

העתקות ופולינומים, ריבוי אלגברי, ריבוי גיאומטרי, תת-מרחב אינווריאנטי  
גיא רוזנדורן, 29/05/2008, 08:05

---

### תוכן עניינים

- 1.....העתקות ופולינום אופייני
- 3.....תת-מרחב אינווריאנטי

## תקציר משפטים, נוסחאות והדגשים

תהי  $\lambda$  ערך עצמי של  $T$ . הריבוי האלגברי של  $\lambda$  הוא החזקה  $k$  כך ש  $\lambda^k - x$  מופיע בפירוק של הפולינום האופייני  $f_T(x)$  לחזקות של גורמים אי-פריקים שונים.

הריבוי הגיאומטרי הוא המימד  $\dim V_\lambda$ , כאשר  $V_\lambda = \{v \in V \mid Tv = \lambda v\}$ . יש הצגה אלכסונית אם ורק אם:

א.  $f_T$  הוא מכפלה של גורמים ממעלה 1:  $f_T = \prod_{i=1}^n (x - \lambda_i)$  באשר  $\lambda_i \in F$  שונים

ב. הריבוי הגיאומטרי של כל ערך עצמי  $\lambda_i$  של  $T$  שווה לריבוי האלגברי שלו.

פולינום  $mT \in F[x]$  נקרא פולינום מזערי של  $T$  אם הוא מתוקן ובעל בעלה מזערית מבין כל הפולינומים  $g \in Fx$  שמקיימים  $gT = 0$ , כלומר שמאפסים את  $T$ . יהי  $B$  בסיס של  $V$ . תהי  $TBB = C$ . אז  $mT = mc$ .

מטריצה  $A \in Mn(F)$  דומה למטריצה משולשית עליונה  $C$  אם ורק אם הפולינום האופייני מורכב ממכפלה של גורמים ממעלה 1 לא בהכרח שונים:  $f_A(x) = \prod_{i=1}^n (x - \lambda_i)$ .

תנאי זה נכון תמיד אם  $F = \mathbb{C}$  ולכל שדה סגור אלגברית.

יהי  $V$  מרחב וקטורי ממימד  $n$  מעל שדה  $F$ . תהי העתקה ליניארית  $T: V \rightarrow V$ . אז קיים בסיס  $B$  של  $V$  כך שמטריצה  $TBB$  משולשית עליונה אם ורק אם  $f_T(x) = (x - \lambda_1)^{k_1} \dots (x - \lambda_n)^{k_n}$ .

יהי  $V$  מרחב וקטורי מעל שדה  $F$ , תהי העתקה ליניארית  $T: V \rightarrow V$ .

תת-מרחב  $W$  של  $V$  נקרא אינווריאנטי אם  $TW \subseteq W$ , כלומר  $Tw \in W$  לכל  $w \in W$ . הצמצום של  $T$  ל  $W$ , כלומר, ההעתקה  $T': W \rightarrow W$  המוגדרת ע"י  $T'w = T(w)$  היא גם ליניארית. היא תסומן  $TW$ .

יהי  $f \in F[x]$  אז  $\ker fT, \text{Im} f(T)$  הם אינווריאנטים- $T$ .

יהי  $V$  מרחב וקטורי,  $W_1, \dots, W_r$  תת-מרחב של  $V$ . נאמר ש- $V$  סכום ישר של  $W_1, \dots, W_r$  וכותבים  $v = w_1 + \dots + w_r$ ,  $w_1 \in W_1, \dots, w_r \in W_r$ : יש הצגה אחת ויחידה:  $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_r$  אם ורק אם  $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_r$  בסיס של  $W_i$  יהי  $B_i$  בסיס של  $W_i$ . אז  $B = B_1 \oplus \dots \oplus B_r$  בסיס של  $V$ .