# שיעור 08

חדו"א 2

[Comments]

גיא רוזנדורן, 29/05/2008 10:09

## משפט 4

***סדרה של פונקציות גזירות $f_n$ כשידוע שהנגזרת הראשונה רציפה, ושהנגזרת של הסדרה רציפה במידה שווה ל $g$. אם הסדרה מתכנסת רק בנקודה אחת אז $f_n$ מתכנסת במ"ש ו $f' = g$.***

$$f_n \in C^1[a,b]$$
$$f_n' \rightrightarrows g$$
$$\exists \lim \mathrm{f_n}(c)$$
$$f_n \rightrightarrows f \;\; f \in C^1 \; f' = g$$

## דוגמא

$$f_n(x) = (1)^n \quad x \in [a,b]$$
$$f_n' = 0$$

## הוכחה

$$f_n(x) = f_n(c) + \int_c^x f_n' \qquad x \in [a,b]$$
$$f(c) = \lim f_n(c)$$
$$f(x) + f(c) + \int_c^x g$$

$g$ רציפה ולכן: $f \in C^{-1}$ ו $f' = g$

$$f_n(x) - f(x) = f_n(c) + \int_c^x f_n{}' - f(c) - \int_c^x f'$$

$$\max_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \le |f_n(c) - f(c)| + \max_{x\in[a,b]} \left|\int_c^x (f_n' - f')\right| \le \max_{x\in[a,b]} \int_c^x |f_n' - f'| \le \int_a^b |f_n' - g| \to_{n\to\infty} 0$$

## דוגמא

קיימת פונקציה $f$ רציפה ב $\mathbb{R}$ אבל לא גזירה באף נקודה:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \cos(b^k \pi x) \qquad 0 < a < 1, b > 1, ab > 1$$

$$u_0(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 1 - x, & \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$$

נגדיר:

$$u_0(x+1) = x \quad u_k(x) = \frac{u_0(4^k x)}{4^k} \quad u_k(x + 4^{-k}) = y_k(x) \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)$$

פונקציה $f(x)$ רציפה בכל קו ממשי (לפי קריטריון קושי סדרת הסכומים החלקיים מתכנסת במ"ש).

נבנה סדרה $x_n \to x_0$ כך שהגבול לא קיים:

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}$$

$$S_n = [2 * 4^n x_0]$$

$$S_n \le 2 * 4^n x_0 \le S_n + 1$$

$$\frac{S_n}{2 * 4^n} \le x_0 < \frac{S_n + 1}{2 * 4^n}$$

$$\Delta_n := \left[\frac{S_n}{2 * 4^n}, \frac{S_n + 1}{2 * 4^n}\right] \in x_0$$

$$\dots \supset \Delta_{n-1} \supset \Delta_n \supset \Delta_{n+1} \supset \cdots$$

$$\cap \Delta_n = \{x_o\}$$

$$|x_n - x_0| = \frac{1}{2} |\Delta_n| = \frac{1}{4^{n+1}}$$

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u_k(x_n) - u_k(x_0)}{x_n - x_0}$$

$$u_k(x_n) = u_k(x_0) \Leftarrow k \ge n + 1$$

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = \sum_{k=0}^{n} \frac{u_k(x_n) - u_k(x_0)}{x_n - x_0}$$

$$x_n, x_0 \in \Delta_n \subset \Delta_k \quad k \le n$$

$$\frac{u_k(x_n) - u_k(x_0)}{x_n - x_0} = \pm 1$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{u_k(x_n) - u_k(x_0)}{x_n - x_0} = \sum_{0}^{n} \pm 1 = \begin{cases} even, & n\ odd \\ odd, & n\ even \end{cases}$$

לכן גבול לא קיים.

## משפט Weierstrass

***אפשר לקרב כל פונקציה רציפה בקטע ע"י פולינומים:***

$$\forall f \in C[a,b]. \forall \epsilon > 0. \exists P \in F[x]. \max_{[a,b]} |f - P| < \epsilon$$

$$\forall f \in C[a,b] \Leftrightarrow \exists \{P_n\}, \qquad P_n \rightrightarrows f$$

הערה: מספיק לקטע $t \in [0,1]$. נגדיר: $F(t) = f\big(a + t(b-a)\big) \in C[a,b]$. לפי מקרה פרטי:
$\max_{[0,1]}|F - Q| < \epsilon$. נגדיר $P(x) = Q\left(\frac{x-a}{b-a}\right), x \in [a,b]$ : $\max|F - P| = \max|F - Q| < eps$.

הוכחה: $f \in C[0,1]$. נגדיר $B_n(x,f) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$. צריך להראות ש $B_n(x,f) \rightrightarrows f$.

נניח שהנוסחאות הבאות נכונות:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 x^k (1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n} \le \frac{1}{\pi}$$

אז נפרק את הסכום לשני סכומים:

$$f(x) - B_n(x)$$

נבחר $\delta > 0$ כך ש $\left|x - \frac{k}{n}\right| < \delta \Rightarrow \left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| < \epsilon$.

$$\left|\sum\nolimits_1\right| \le \sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| < \delta} \binom{n}{k} \epsilon x^k (1-x)^{n-k} \le \epsilon \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \epsilon$$

$$M = \max_{[0,1]} |f|$$

$$\left|\sum\nolimits_2\right| \le 2M \sum_{k:\left|\frac{k}{n} - x\right| > \delta} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \frac{\left(\frac{k}{n} - x\right)^2}{\delta^2}$$

$$\le \frac{2M}{\delta^2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 x^k (1-x)^{n-k} \le \frac{2M}{\delta^2} \frac{1}{4n} = \frac{M}{2n\delta^2} < \epsilon$$

$$n > \frac{M}{2\epsilon\delta^2}$$

## טורים מפונקציות

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \qquad \sum_{-\infty}^{\infty} f_n(x) \star$$

### הגדרה

***טור $\star$ מתכנס במידה שווה אם סדרה $S_N$ מתכנסת במידה שווה:***

$$S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} f_n(x)$$

אם $f_n \in C[a,b]$ ו $\star$ מתכנס במ"ש בקטע $[a,b]$ אז $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \in \mathrm{C}[\mathrm{a},\mathrm{b}]$.

$$\int_a^b f = \sum_a^b \int_a^b f_n \quad (!)$$

בדיקה של (!):

$$\int_A^b S_N \to \int_a^B f \Leftarrow S_n \rightrightarrows f$$

$$\int_a^B f = \sum_{n-0}^{N} \int_a^b f_n \Rightarrow \int_a^b f = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n$$

משפט Dini אומר: $f_n \geq 0$, $f_n \in C[a,b]$ ו $F = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \in C[a,b]$ אז התכנסות במידה שווה, $S_N(x) \uparrow$.

### משפט M-test Weierstrass

נניח ש $f_n : E \to \mathbb{R}$, ונניח ש $\sup_E |f_n| \leq M_n$ ו $\sum_n M_n < \infty$ אז טור $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ מתכנס במ"ש ב E (בהחלט).

הוכחה:

$$S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} f_n(x)$$

צריך לבדוק את תנאי קושי:

$$\forall \epsilon. \exists N. \forall n,m \geq N. \sup_E |S_n - S_m| < \epsilon$$

$$\sup_E |S_n - S_m| = \sup_E \left| \sum_{k=n+1}^{m} f_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \sup_E |f_k| \leq \sum_{n+1}^{m} M_k < \epsilon$$

# שיעור 08

חדו"א 2

[Comments]

גיא רוזנדורן, 29/05/2008 10:09

## תוכן עניינים

# שיעור 08

חדו"א 2

[Comments]

גיא רוזנדורן, 29/05/2008 10:09

## תקציר משפטים, נוסחאות והדגשים

סדרה של פונקציות גזירות $fn$ כשידוע שהנגזרת הראשונה רציפה, ושהנגזרת של הסדרה רציפה במידה שווה ל $g$. אם הסדרה מתכנסת רק בנקודה אחת אז $fn$ מתכנסת במ"ש ו $f' = g$.

אפשר לקרב כל פונקציה רציפה בקטע ע"י פולינומים:

$\forall f \in Ca,b.\forall\epsilon > 0.\exists P \in Fx.\max a,bf - P < \epsilon$

טור $\star$ מתכנס במידה שווה אם סדרה $SN$ מתכנסת במידה שווה:

$SNx = n = 0Nfn(x)$