

## תורת הקבוצות

### קבוצה

קבוצה היא אוסף של איברים עם שתי תכונות:  
 אין חשיבות לסדר האיברים  
 אין חשיבות למספר המופעים של כל איבר.

### קבוצות חשובות

$\mathbb{N}$  קבוצת המספרים הטבעיים:  $\{1,2,3, \dots\}$

$\mathbb{Z}$  קבוצת המספרים השלמים:  $\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ , מכילה את קבוצת המספרים הטבעיים

$\mathbb{Q}$  קבוצת המספרים הרציונאליים: כל ה-"שברים"

$\mathbb{R}$  קבוצת המספרים הממשיים.

### סימון ע"י כלל?

נתונה הקבוצה  $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ .

מהי הקבוצה  $B = \{x | x \in A \wedge \exists y \in A. x + y < 14\}$ . במקרה הזה,  $B = A$ .

מהי הקבוצה  $C = \{x \in A | \forall y \in A. x + y \leq 12\}$  אז  $C = \{1,2\}$ .

### הכלה בין קבוצות

נסמן  $A \in B$  אם ורק אם כל איבר של  $A$  חייב להימצא גם ב- $B$ . או במלים אחרות:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall a. a \in A \Rightarrow a \in B$$

וגם:  $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

### הקבוצה הריקה

קבוצה  $A$  המקיימת  $\forall a. a \notin A$  היא הקבוצה הריקה ותסומן ב- $\emptyset$

### דוגמאות

קבוצת המספרים 1,2,3 תסומן ב- $\{1,2,3\}$ .

שלושת קבוצות המספרים  $\{1,2,3\}$ ,  $\{3,1,2\}$ ,  $\{3,3,1,3,2,2,1,3,1\}$  שוות.

האיבר 3 שייך לקבוצה. נסמן  $3 \in \{1,2,3\}$ .

$$2 \notin \{\{1,2\}, \{2\}, 1, \{3\}\}$$

$$\{3,5\} \subseteq \{3,5,7\}$$

$$\mathbb{N}_{odd} = \{n \in \mathbb{N} | \exists k \in \mathbb{N}. n = 2k - 1\}$$

$$\forall A. A \Delta A = \emptyset$$

$$\forall A. A \Delta \emptyset = A$$

# תרגול 01

מתמטיקה בדידה

תורת הקבוצות

גיא רוזנדורן, 22/05/2008 16:04

## תרגיל

אם  $A \subseteq B$  וגם  $B \subseteq C$  אז  $A \subseteq C$ . או במילים אחרות, הוכח ש  $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$ .  
נניח ש  $A \subseteq B \wedge B \subseteq C$  וצריך להוכיח  $A \subseteq C$ .

יהי  $a$  איבר כלשהו השייך ל  $A$ , כלומר:  $a \in A$ .  
לפי ההנחה כי  $A \subseteq B$  נסיק כי  $a \in B$ .  
לפי ההנחה כי  $B \subseteq C$  נסיק כי  $a \in C$ .  
לכן,  $A \subseteq C$ .

## נכון או לא נכון

1.  $\emptyset \subseteq \emptyset$ ? נצריך:  $a \in \emptyset \Rightarrow a \in \emptyset$ . נכון.
2.  $\emptyset \in \emptyset$ ? לא נכון. בתוך הקבוצה הריקה אין שום דבר.
3.  $\emptyset \in \{\emptyset\}$ ? נכון.
4.  $1 \in \{\{1\}, 2\}$ ? לא נכון.
5.  $\emptyset \subseteq A$ ? הקבוצה הריקה מוכלת בכל קבוצה. נכון.
6.  $\{\emptyset\} \notin \{\emptyset\}$ ? נכון.

## תרגיל

האם  $4 \in \{x \mid \forall y. (y \in \{x \in \mathbb{N} \mid \frac{1}{x} < \frac{1}{2}\}) \rightarrow (y > x)\}$ ?

נציב ונבדוק האם הביטוי שהתקבל ע"י הצבה הוא פסוק אמת:

$$\forall y. (y \in \{x \in \mathbb{N} \mid \frac{1}{x} < \frac{1}{2}\}) \rightarrow (y > 4)$$

$$\forall y. (y \in \{x \in \mathbb{N} \mid x > 2\}) \rightarrow (y > 4)$$

$$\forall y. (y \in \{y \in \mathbb{N} \wedge y > 2\}) \rightarrow (y > 4)$$

פישטנו את הביטוי וקל עתה לראות שהוא ביטוי שקר: ניקח דוגמא נגדית:  $3 > 2 \sim 3 > 4$ .

## פעולות על קבוצות

$$A \cap B = \{a | a \in A \wedge a \in B\}$$

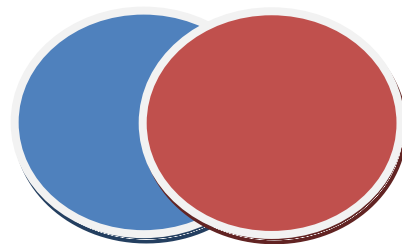
$$A \cup B = \{a | a \in A \vee a \in B\}$$

$$A \setminus B = \{a | a \in A \wedge a \notin B\}$$

$$\bar{A} = \{a | a \notin A\}$$

$$A \Delta B = \{a | a \in A \setminus B \vee a \in B \setminus A\}$$

נמחיש בעזרת דיאגרמת וול:



$A \cup B$  זה כל השטח הצבוע  
 $A \cap B$  זה השטח הצבוע בסגול  
 $A \setminus B$  זה השטח הצבוע בכחול  
 $A \Delta B$  זה כל השטח הכחול והאדום

נאמר  $A = B$  אם ורק אם  $\forall a. a \in A \Leftrightarrow a \in B$   
 נאמר ש  $A = B$  אם ורק אם  $A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

## תרגיל

הוכיחו כי  $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ .

נוכיח באמצעות הכלה דו-כיוונית.

כיוון ישר:

יהי  $x \in A \Delta B$ . לכן  $x \in A \setminus B \vee x \in B \setminus A$ .

מקרה ראשון:

נניח  $x \in A \setminus B$ . מכך ש  $x \in A$  נסיק  $x \in A \cup B$ . מכך ש  $x \notin B$  נסיק כי  $x \notin A \cap B$ . לכן  $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ .

מקרה שני:

נניח  $x \in B \setminus A$ . לכן  $x \in B$  וגם  $x \in A \cup B$ . מכך ש  $x \in B$  נסיק כי  $x \in A \cup B$ . מכך ש  $x \notin A$  נסיק כי  $x \notin A \cap B$ .

לכן  $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ .

כיוון הפוך:

יהי  $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ . לכן  $x \in A \cup B$  וגם  $x \notin A \cap B$ .

מקרה ראשון:  $x \in A$  וגם  $x \notin A \cap B$  ולכן  $x \in A \setminus B$ .

מקרה שני:  $x \in B$  וגם  $x \notin A \cap B$  ולכן  $x \in B \setminus A$ . לכן  $x \in A \Delta B$  כלומר  $x \in A \Delta B$ .

## תרגול 01

מתמטיקה בדידה

תורת הקבוצות

גיא רוזנדורן, 22/05/2008 16:04

### תרגיל

הוכח או הפוך:

$$A = B \Leftrightarrow \forall C. A \cup C = B \cup C$$

צריך להוכיח "אם ורק אם" אז צריך להוכיח שני כיוונים:

כיוון  $\Rightarrow$ :

תהי  $C$  קבוצה כלשהי כך ש  $a \in C$ . אם  $a \in A$  אז מכך ש  $A \subseteq B$  נסיק ש  $a \in B$  ולכן  $a \in B \cup C$ . באופן סימטרי (נחליף  $A$  ב  $B$ ) נקבל כי  $B \cup C \subseteq A \cup C$ .

כיוון  $\Leftarrow$ :

$$\text{נבחר את } C = \emptyset. \text{ לכן } A = A \cup \emptyset = B \cup \emptyset = B$$

הוכח או הפוך:

$$A = B \Leftrightarrow \exists C. A \cup C = B \cup C$$

זה לא נכון. דוגמה נגדית:  $A = \{1,2\}, B = \{3,4\}, C = \{1,2,3,4\}$ .

הוכח או הפוך:

$$A = B \Leftrightarrow \exists C. A \Delta C = B \Delta C$$

כיוון  $\Leftarrow$ : נניח  $A = B$ . נבחר  $C = \emptyset$  ונקבל  $A \Delta C = B \Delta C = \emptyset$ .

כיוון  $\Rightarrow$ : נתון  $A \Delta C = B \Delta C$ . לכן  $(A \Delta C) \Delta C = (B \Delta C) \Delta C$ . כלומר  $A \Delta (C \Delta C) = B \Delta (C \Delta C)$ . כלומר  $A \Delta \emptyset = B \Delta \emptyset$ . ולכן  $A = B$ .

### קבוצת החזקה

תהי  $A$  הקבוצה הריקה  $P(A) = \{x | x \subseteq A\}$ .

### תרגיל

אם  $W \in V$  אזי  $P(W) \in P(V)$ .

$$P(W) \in P(V) \Leftrightarrow P(W) \subseteq V$$

מכיוון ש  $W \in P(W)$  נסיק כי  $W \in V$ .

### עוצמה

עוצמה של קבוצה זה מספר האיברים בה.

עוצמת קבוצת החזקה של קבוצה מעוצמה  $k$  הינו  $2^k$ .

## הוכח או הפרך

$$(A \subseteq B) \Rightarrow P(A) \subseteq P(B)$$

נניח  $A \subseteq B$ . צריך להוכיח  $P(A) \subseteq P(B)$ .  
יהי  $x \in P(A)$  ולכן  $x \subseteq A$ . מכך ש  $A \subseteq B$  נסיק כי  $x \subseteq B$  ולכן  $x \in P(B)$ .

$$(P(A) \subseteq P(B)) \Rightarrow A \subseteq B$$

זה גם נכון.  $A \in P(A)$  ולכן  $A \in P(B)$  ולכן  $A \subseteq B$ .

$$A \subset B \Rightarrow P(A) \in P(B)$$

זה לא נכון. דוגמא נגדית:  $A = \{1\}$  או  $A = \{0, \{1\}\}$ .  $P(A) = \{0, \{1\}\}$ .  $B = \{\{1\}, 2\}$  ולכן  $P(B) = \{\emptyset, \{\{1\}\}, \{2\}, \{\{1\}, 2\}\}$ .

$$P(A) \in P(B) \Rightarrow A \in B$$

$$P(A) \in P(B) \Rightarrow P(A) \subseteq B$$

מכך ש  $A \in P(A)$  נסיק  $A \in B$ .

## כללי דה-מורגן

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

# תרגול 01

מתמטיקה בדידה

תורת הקבוצות

גיא רוזנדורן, 22/05/2008 16:04

---

## תוכן עניינים

1.....תורת הקבוצות

## תקציר משפטים, נוסחאות והדגשים

קבוצה היא אוסף של איברים עם שתי תכונות:  
 אין חשיבות לסדר האיברים  
 אין חשיבות למספר המופעים של כל איבר.  
 $\mathbb{N}$  קבוצת המספרים הטבעיים:  $\{1, 2, 3, \dots\}$   
 $\mathbb{Z}$  קבוצת המספרים השלמים:  $\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$ , מכילה את קבוצת המספרים הטבעיים  
 $\mathbb{Q}$  קבוצת המספרים הרציונאליים: כל ה-"שברים"  
 $\mathbb{R}$  קבוצת המספרים הממשיים.  
 נסמן  $A \in B$  אם ורק אם כל איבר של  $a$  ב  $A$  חייב להימצא גם ב  $B$ . או במלים אחרות:  

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall a. a \in A \Rightarrow a \in B$$
 קבוצה  $A$  המקיימת  $\forall a. a \notin A$  היא הקבוצה הריקה ותסומן ב  $\emptyset$   
 תהי  $A$  הקבוצה הריקה  $PA = \{x \mid x \subseteq A\}$ .  
 עוצמה של קבוצה זה מספר האיברים בה.  
 עוצמת קבוצת החזקה של קבוצה מעוצמה  $k$  הינו  $2^k$ .