תרגול 03

אלגברה ליניארית 2

ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים, מרחבים עצמיים

גיא רוזנדורן, 28/05/2008 08:01

חוגים ופולינומים

תרגיל

$f(x) \in \mathbb{R}[x]$ פולינום ממשי עם שורש מרוכב z. הוכח שגם $\bar{z}$ הוא שורש של f.

נכתוב את הפולינום באופן הבא:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

לפי אלגברה א', סכום מספרים מרוכבים שווה לסכום המספרים הצמודים.

מתקיים גם $a_i = \bar{a}_i$ כי $a_i \in \mathbb{R}$, אז:

$$f(\bar{z}) = \sum_{i=0}^{n} a_i \bar{z}_i = \sum_{i=0}^{n} \bar{a}_i \bar{z}_i = \sum_{i=0}^{n} a_i z_i = \bar{0} = 0$$

תרגיל

מצא את כל האוטומורפיזמים של $\mathbb{Z}[i]$

הזהות וההצמדה הם אוטומורפיזם ונראה שהם כולם.

נניח ש ϕ אוטומורפיזם של $\mathbb{Z}[i]$. באופן כללי, עבור מספר טבעי n:

$$\phi(n) = \phi(1+1+\cdots+1) = \phi(1)+\phi(1)+\cdots+\phi(1) = {}^{1}1+1+\cdots+1 = n$$

$$\phi(-n) = -\phi(n) = -n$$

קיבלנו שלכל $k \in \mathbb{Z}$ מתקיים $\phi(k) = k$.

נסתכל על $i^2 + 1 = 0$:

אז באופן כללי:

$$\phi(a+ib) = \phi(a) + \phi(i)\phi(b) = a + \phi(i)b$$

לכן יש 2 אפשרויות:

$$\phi(a+ib)a+ib$$

$$\phi(a-ib) = a-ib$$

[1] $\phi(1) = \phi(1*1) = \phi(1)\phi(1) \Rightarrow \phi(1) = 1$

צורות של העתקות

העתקת השיקוף

נסתכל על $\mathbb{R}^2$, וניקח בסיס: $\{(1,1),(1-1)\}$.
נתונה העתקה T כך ש: $T(1,-1)=-(1,-1)$,$T(1,1)=(1,1)$.
אפשר לצייר את הוקטורים במרחב ולראות שההעתקה הזו היא העתקה משקפת ביחס ל $(1,1)$.
נבנה את המטריצה המייצגת של ההעתקה לפי הבסיס הזה:

$$T(1,1)=1v_1+0v_2$$
$$T(1,-1)=0v_1-1v_2$$
$$[T]=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

וקיבלנו שהיא מטריצה אלכסונית.

באופן כללי,
העתקה $T:V\to V$ היא בעלת הצגת אלכסונית אם קיים בסיס $v_1,\dots,v_n$ כך ש $T(v_i)=\alpha_i v_i$.
השאלה היא איך מוצאים בסיס "נחמד" כזה.

השאלה במונחי מטריצות: נתונה מטריצה $A\in M_n(F)$, האם קיימת מטריצה P הפיכה כך ש $P^{-1}AP$ היא אלכסונית?

תזכורת מהשיעור

- λ ערך עצמי של A אם ורק אם קיים $v\neq 0$ כך ש $Av=\lambda v$
- $|A-\lambda I|=0$ אם ורק אם λ שורש של הפולינום האופייני של A
- אם A מטריצה, λ סקלר, אז נסמן: $V_\lambda=\{v|Av=\lambda v\}$. אם $V_\lambda\neq\{0\}$ אומרים ש λ הוא ערך עצמי של A, ו V_λ נקרא המרחב העצמי של λ.
- $V_\lambda=\{v|(A-\lambda I)*v=0\}$
- אם $f\in F[x]$ ו $A\in M_n(F)$ אפשר להציב את המטריצה בתוך הפולינום:
  $f(x)=a_nx^n+\dots+a_1x+a_0$, כלומר: $f(A)=a_nA^n+\dots+a_1A+a_0I$
- משפט קייל-המילטון: אם f_A פולינום אופייני של A אז $f_A(A)=0$.
- הפולינום המינימאלי של A הוא הפולינום המותקן מעל המעלה המינימאלית שמתאפס ע"י A
  - הפולינום המינימאלי מחלק את הפולינום האופייני
  - כל שורש של הפולינום האופייני הוא שורש של הפולינום המינימאלי. כלומר, אם $x-\alpha|f_A$ אז $x-\alpha|m_A$
- $Av=\lambda v$, ולכן $A^2v=A(\lambda v)=\lambda av=\lambda\lambda v=\lambda^2 v$ ולכן $A^kv=\lambda^k v$.

דוגמא

נתונות שתי מטריצות ממשיות:

$$A=\begin{pmatrix}-7&8\\-6&7\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&-3&3\\-1&0&-2\end{pmatrix}$$

א. מצא את הערכים העצמיים של A,B

נחשב פולינום אופייני:

$$f_A(x)=|xI-A|=\begin{vmatrix}x+7&-8\\6&x-7\end{vmatrix}=(x+7)(x-7)-48=x^2-49+49=x^2-1=(x-1)(x+1)$$

קיבלנו שהערכים העצמיים של A הם: $\lambda_1=1,\lambda_2=-1$

$$f_B(x)=|xI-B|=\begin{vmatrix}x-2&1&-2\\-5&x+3&-3\\1&0&x+2\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}1&-2\\x+3&-3\end{vmatrix}-0+(x+2)\begin{vmatrix}x-2&1\\-5&x+3\end{vmatrix}$$
$$=-3+2(x+3)+(x+2)[(x-2)(x+3)+5]=2x+3+(x+2)(x^2+x-1)=$$
$$=x^3+3x^2+3x+1=(x+1)^3$$

קיבלנו שהערך העצמי היחיד של B הוא: $\lambda_1=-1$

ב. לכל ערך עצמי של A,B חשב את המרחב העצמי שלו

נתחיל עם המטריצה A.

$$V_{-1}=\{v|(A+I)v=0|$$
$$A+I=\begin{pmatrix}-6&8\\-6&8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-6&8&0\\-6&8&0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}3&-4&0\\0&0&0\end{pmatrix}\to V_{-1}=\left\{\left(\frac{4}{3}s,s\right)\middle|s\in\mathbb{R}\right\}$$
$$V_1=\{v|(A-I)v=0\}$$
$$A-I=\begin{pmatrix}-8&8\\-6&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-8&8&0\\-6&6&0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\to V_1=\{(t,t)|t\in\mathbb{R}\}$$
$$V_{-1}=\{v|(B+I)v=0\}$$
$$B+I=\begin{pmatrix}3&-1&2\\5&-2&3\\-1&0&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}3&-1&2&0\\5&-2&3&0\\-1&0&-1&0\end{pmatrix}\Rightarrow\to V_{-1}$$

נבדוק את המרחבים העצמיים של המטריצה של B לבד.

ג. חשב את הפולינום המינימאלי של A,B.

$$A=\begin{pmatrix}-7&8\\-6&7\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&-3&3\\-1&0&-2\end{pmatrix}$$

$$f_A(x)=x^2-1=(x-1)(x+1)$$
$$f_B(x)=(x+1)^3$$

$$m_A|(x-1)(x+1)|\to x+1,x-1|m_A\to(x+1)(x-1)|m_A\to m_A=(x-1)(x+1)$$

$$m_B|(x+1)^3\to m_B=\cancel{1},\cancel{x+1},\cancel{(x+1)^2},(x+1)^3$$

ל 1 אין שורש ולכן 1 אינו יכול להיות הפולינום המינימאלי.

השורש של הפולינום האופייני הוא גם של המינימאלי, אז אם נציב ב $(x+1)=0$, נראה ש $B+I\neq0$ ולכן $x+1$ אינו הפולינום המינימאלי.

אותו דבר נעשה עם $(x+1)^2$: נחשב ונראה ש: $(B+I)^2\neq0$ ולכן גם הוא אינו הפולינום המינימאלי.

לכן, $(x+1)^3$ הוא הפולינום המינימאלי.

תרגול 03

אלגברה ליניארית 2

ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים, מרחבים עצמיים

גיא רוזנדורן, 28/05/2008 08:01

תרגיל

יהי $f \subset F[x]$ ו $A \in M_n(F)$. הוכח ש $f(A^t) = f(A)^t$.

הוכחה:

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

$$f(A^t) = a_n (A^t)^n + \cdots + a_1 (A^t) + a_0 I = a_n (A^n)^t + \cdots + a_0 I^t = (a_n A^n)^t + \cdots . + (a_0 I)^t = f(A)^t$$

מסקנה:

ל A, A^t אותו פולינום מינימאלי.

הוכחה:

פולינום f מתאפס ע"י A אם ורק אם f מתחלק בפולינום המינימאלי. נסמן ב m את הפולינום המינימאלי של A, וב m' את הפולינום המינימאלי של A^t. אז: $m(A^t) = m(A)^t = 0^t = 0 \Rightarrow m' | m$.

באותו אופן, $m | m'$ ולכן $m = m'$.

זה לא נכון, דרך אגב, לגבי פולינום אופייני.

תרגיל

$f \in F[x]$, λ ערך עצמי של A.

א. הוכח ש $f(\lambda)$ ערך עצמי של $f(A)$.

יש $v \neq 0$ כך ש $Av = \lambda v$. אז:

$f(A)v = (a_$

כלומר, $f(\lambda)$ ערך עצמי של $F(A)$.

ב. הוכח שאם $f(A) = 0$ אז כל ערך עצמי של A הוא שורש של f.

אם λ ערך עצמי של A אז קיים $v \neq 0$ כך ש $Av = \lambda v$. לכן: $0 = f(a)V = f(\lambda)v$ ולכן $f(\lambda) = 0$ ובמלים אחרות λ הוא שורש של f.

ג. נניח ש $A \in M_n(\mathbb{R})$. וגם נניח ש $A^{-1} = I - A$. הוכיחו של- A אין ערך עצמי, וש- n זוגי.

מהמשוואה $A^{-1} = I - A$ נקבל: $I = A - A^2 \Rightarrow A^2 - A + I = 0$. קיבלנו שהפולינום $f(x) = x^2 - x + 1$ מתאפס ע"י A. אז אם $\lambda \in \mathbb{R}$ ערך עצמי של A, אז λ הוא שורש של הפולינום הזה. אבל לפולינום הזה אין שורשים ב $\mathbb{R}$. סתירה, לכן ל A אין ערך עצמי.

הפולינום האופייני של A הוא פולינום ממעלה n. מכיוון שאין לפולינום הזה שורשים ב $\mathbb{R}$, אז המעלה שלו היא זוגית (למדנו את זה בחדו"א).

תרגיל

תהי מטריצה הפיכה $A \in M_n(F)$ עם פולינום מינימאלי $a_0 + a_1 x + \cdots + x^k$. מצא את $m_{A^{-1}}(x)$.

לפולינום המינימאלי יש שורשים, לכן: $a_0 + a_1 A + \cdots . + a_{k-1} A^{k-1} + A^k = 0$.

נכפול את המשוואה ב A^{-k}: $a_0 A^{-k} + a_1 A^{-k+1} + a_{k-1} A^{-1} + I = 0 = a_0 (A^{-1})^k + \cdots + a_{k-1} (A^{-1}) + I$

כלומר, A^{-1} מאפסת את הפולינום $a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \cdots + a_{k-1} x + 1$,

לכן A^{-1} מאפסת את $f = x^k + \frac{a_1}{a_0} x^{k-1} \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_0} x + \frac{1}{a_0}$.

תרגול 03

אלגברה ליניארית 2

ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים, מרחבים עצמיים

גיא רוזנדורן, 28/05/2008 08:01

הערה

אם g פולינום ממעלה $l<k$ כך ש $g(A^{-1})=0$ היינו יכולים לבנות פולינום ממעלה l שמתאפס ע"י A. סתירה למינימאליות. לכן f הוא הפולינום המינימאלי של A^{-1}.

שאלת מחשבה

סדרת פיבונצ'י היא הסדרה $a_0=0, a_1=1, a_i=a_{i-1}+a_{i-2}$.

מצא נוסחה לאיבר הכללי בסדרת פיבונצ'י (לא נוסחה רקורסיבית, אלא ביטוי שתלוי רק ב n).