מרחבים סימטריים

קובייה הוגנת

מבצעים סדרה של 10 הטלות קובייה הוגנת. מה ההסתברות שמספר 6 יופיע לפחות 5 פעמים ברציפות?

נקודה במרחב המדגם היא וקטור באורך 10 של ההטלות: $\Omega = \{(x_1, \ldots, x_{10}) | 1 \le x_i \le 6\}$, $|\Omega| = 6^{10}$.

נגדיר מאורע A שבו יופיע רצף של 5 שישיות ברציפות לפחות.

נגדיר מאורע A_k שבו היה רצף של 5 שישיות לפחות שמתחיל בהטלה ה-k. נסתכל על המאורעות:

$$A_6 = (\star\star\star\star\ \#66666), |A_6| = 6^4 * 5$$
$$A_5 = (\star\star\star\ \#66666\ \star), |A_5| = 6^4 * 5$$
$$\vdots$$
$$A_2 = (\#66666\ \star\star\star\star), |A_2| = 6^4 * 5$$
$$A_1 = (66666\ \star\star\star\star\star), |A_6| = 6^5$$

המאורעות $A_6, \ldots, A_1$ הם זרים. אז:

$$|A| = \sum_{k=1}^{6} |A_k| = 5 * 5 * 6^4 + 6^5 = (25 + 6)6^4 = 31 * 6^4$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{31 * 6^4}{6^{10}} = \frac{31}{6^6} \sim \frac{1}{10000}$$

אחים

10 אחים מסתדרים באקראי בשורה, ביניהם אלי ובתיה.

א. מה הסיכוי שאלי ובתיה יהיו אחד ליד השני?

פתרנו את התרגיל הזה באחד התרגולים הקודמים, בשיטת השק (הכנסנו כמה אנשים לתוך שק).

עכשיו נפתור את זה בשיטת המרחב המצומצם. נבחר מרחב מדגם שנקודה בו מכילה וקטור באורך 2, שכל איבר מציין את מספר המיקום של אלי, והשני את מספר המיקום של בתיה. אז: $\Omega = \{(x_1, x_2) | 1 \le x_1 \ne x_2 \le 10\}$. 10 מקומות אפשריים לאלי, ולבתיה נשארו 9 מקומות. אז $|\Omega| = 10 * 9 = 90$. דרך נוספת להסביר זאת היא לבחור שני אנשים מתוך עשרה ולסדר אותם, ודרך נוספת: ניקח את כל 100 אפשרויות הישיבה שלהם, ונחסיר את עשר האפשרויות שאלי ובתיה יושבים באותו מקום בשורה. נסמן מאורע A שבו אלי ובתיה צמודים. בשלב הראשון נמקם את השמאלי מביניהם: לשמאלי יש 9 אפשרויות (הוא לא יכול לשבת במקום הכי ימני), ובשלב השני נבחר מי מביניהם השמאלי: 2 אפשרויות. אז: $|A| = 9 * 2 = 18$ ולכן:

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \frac{18}{90} = \frac{1}{5}$$

ב. מה הכיסוי שבין אלי ובתיה יהיו בדיוק k אנשים?

נגדיר מאורע A_k שבו בין אלי ובתיה נמצאים בדיוק k אנשים. מאורע A_0, שבו אין אנשים בין אלי ובתיה, הוא המאורע שבו הם צמודים (סעיף א'). נסתכל על מאורע A_1, בו איש אחד ביניהם. לשמאלי מביניהם יש 8 אפשרויות להתמקם, ואח"כ נבחר מי השמאלי מביניהם (2 אפשרויות). אז $|A_1| = 8 * 2 = 16$ ולכן:

$$P(A_1) = \frac{16}{90}$$

נסתכל על המאורע הכללי A_k: לשמאלי מביניהם יש $(9 - k)$ אפשרויות ישיבה, ובשלב השני נבחר מי מביניהם הוא השמאלי. אז $|A_k| = (9 - k)2$ ולכן:

$$\mathrm{P}(\mathrm{A_k}) = \frac{(9 - \mathrm{k})2}{90} = \frac{9 - \mathrm{k}}{45}$$

זוגות

5 זוגות מסתדרים באקראי בשולחן עגול הכולל 10 מקומות, ביניהם הזוג אלי ובתיה כהן, וגלי ודליה לוי.

א. כמה אפשרויות שונות יש לסדר 10 אנשים במעגל, כאשר חשוב רק המיקום היחסי של האנשים (אחד ביחס לשני), אך לא המיקום המוחלט ביחס לסביבה החיצונית?

נבנה את מרחב המדגם לפי המיקום היחסי: נמקם את הבנאדם הראשון, ואז לשני יש 9 מקומות ישיבה אפשריים, לשלישי 8 מקומות וכך הלאה. אז $|\Omega| = 1*9*8*\ldots*1 = 9!$

ב. מה הסיכוי שהזוג כהן ישבו אחד ליד השני?

נסמן במאורע A את המאורע שבו הזוג כהן ישבו אחד ליד השני?

בשיטת השק, נשים את הזוג כהן בשק. בשלב הראשון נסדר את השק ושאר האנשים במעגל מתוך 9 המקומות שנשארו (לפי מרחב המדגם), ולכן $8!$ אפשרויות. בשלב השני נסדר את הזוג כהן, 2 אפשרויות. אז $|A| = 8!*2$ ולכן:

$$P(A) = \frac{2*8!}{9!} = \frac{2}{9}$$

ג. מה הסיכוי שגם הזוג כהן וגם הזוג לוי ישבו אחד ליד השני?

נסמן במאורע B את המאורע שבו גם הזוג כהן וגם הזוג לוי ישבו אחד ליד השני.

גם בסעיף זה נשתמש בשיטת השק: נשים את הזוג כהן בשק אחד, ואת הזוג לוי בשק שני. אז בשלב הראשון נסדר את שני השקים ושאר האנשים – לכך $7!$ אפשרויות. אח"כ נסדר את האנשים בתוך השקים, אז $|B| = 7!*2*2$ ולכן:

$$P(B) = \frac{7!\,4}{9!} = \frac{4}{9*8} = \frac{1}{18}$$

ד. מה הסיכוי שאף בעל לא יישב ליד אשתו? רמז: הופכי, הכלה וההדחה.

נסמן במאורע C את המאורע שבו אף בעל לא יישב ליד אשתו. נשיב לב:

$$\overline{C} = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5$$

כאשר המאורע A_k הוא המאורע שבו הזוג ה-k יושבים אחד ליד השני והם שווי-הסתברות.

לפי נוסחת ההכלה-הדחה:

$$P(\overline{C}) = \sum_{k=1}^{5} P(A_k) - \sum_{i<j=1}^{5} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k=1}^{5} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \sum_{i<j<k<l=1}^{5} P(A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l) + P(\cap_{i=1}^{5} A_i)$$

$$= 5P(A_1) - \binom{5}{2} P(A_i \cap A_j) + \binom{5}{3} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \binom{5}{4} P(A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l) + P(\cap_{i=1}^{5} A_i)$$

$$P(A_i \cap A_j \cap A_k) = \frac{6!*2^3}{9!} = \frac{1}{63}$$

$$P(A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l) = \frac{5!*2^4}{9!}$$

$$P(\cap_{i=1}^{5} A_i) = \frac{4!*2^5}{9!}$$

$$P(\overline{C}) = 5*\frac{2}{9} - \binom{5}{2}*\frac{1}{18} + \binom{5}{3}*\frac{1}{63} - \binom{5}{4}\frac{5!*2^4}{9!} + \frac{4!*2^5}{9!}$$

תרגול 05

מבוא להסתברות

מרחבים סימטריים

גיא רוזנדורף, 29/05/2008 14:15

צריחים בשחמט

בוחרים באקראי 8 משבצות שונות בלוח השחמט, וממקמים צריח בכל משבצת. מה הסיכוי שאף צריח לא יאיים על צריח אחר?

הלוח הוא $8 * 8$, וצריח יכול לאיים על מישהו שבאותו שורה שלו, או באותו טור שלו.

נקודה במרחב המדגם תהיה וקטור באורך של 8 – אותן 8 משבצות שנבחרו באקראי בלוח עבור 8 הצריחים. בכל נקודת מדגם בוחרים 8 משבצות מתוך 64, אז $|\Omega| = \binom{64}{8}$.

נסמן במאורע A את המאורע שבו אף צריח לא מאיים על צריח אחר, כלומר אין 2 משבצות באותה שורה ובאותו טור. לצריח בשורה הראשונה יש 8 אפשרויות, לצריך בשורה השנייה יש 7 אפשרויות (כי טור אחד כבר תפוס), וכך הלאה עד הצריח האחרון שיש לו רק אפשרות אחת. אז $|A| = 8!$ ולכן:

$$P(A) = \frac{8!}{\binom{64}{8}}$$

כדורים

מחלקים באקראי n כדורים ל m תאים, ידוע שיש יותר כדורים מתאים. מה הסיכוי שאין תאים ריקים?

נקודה במרחב המדגם היא וקטור באורך N כך שבכל איבר רשום את מספר התא של כל כדור.

כלומר, $\Omega = \{(x_1, \dots, x_n) | 1 \leq x_i \leq m\}$ ולכן $|\Omega| = m^n$.

נסמן מאורע A בו אף תא אינו ריק. קשה לחשב אותו ישירות, אז נסתכל על המשלים שלו:

המאורע המשלים הוא המאורע שבו לפחות תא אחד ריק, והוא: $\overline{A} = B_1 \cup \dots \cup B_m$, כאשר המאורעות B_k הוא המאורע שבו התא ה-k הוא ריק והם שווי-הסתברות. אז לפי נוסחת ההכלה-החדה:

$$P(\overline{A}) = \sum_{k=1}^{m} P(B_k) - \sum_{i<i=1}^{m} P(B_i \cap B_j) + \cdots + (-1)^{m+1} P(B_1 \cap \dots \cap B_m)$$

$$= \binom{m}{1} P(B_1) - \binom{m}{2} P(B_1 \cap B_2) + \binom{m}{3} P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) + \cdots$$

$$+ (-1)^{m+1} \binom{m}{m} P(B_1 \cap \dots \cap B_m)$$

$$P(B_1) = \frac{(m-1)^n}{m^n}$$

$$P(B_1 \cap B_2) = \frac{(m-2)^n}{m^n}$$

$$P(B_1 \cap \dots \cap B_k) = \frac{(m-k)^n}{m^n}$$