תרגול 06

חדו"א 2

אינטגרל לא אמיתי

גיא רוזנדורן, 25/05/2008 08:02

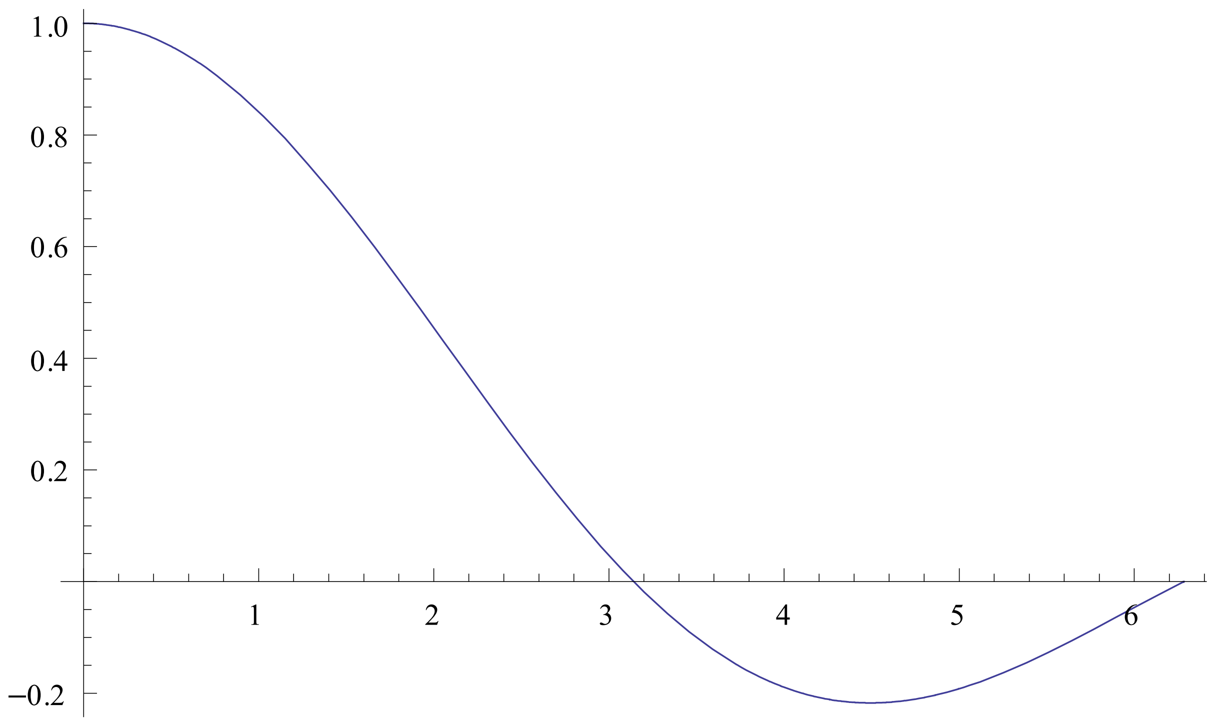
תרגיל

יש למצוא את הסימן של האינטגרל:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin(x)}{x} dx$$

הפונקציה לא מוגדרת באפס, אבל אפשר להשלים, והיא רציפה, חסומה, אינטגרבילית.

נצייר את גרף הפונקציה:



אז:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin(x)}{x} dx = \int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{x} dx + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin(x)}{x} dx$$

$$t = x - \pi$$

$$x = t + \pi$$

$$dx = dt$$

$$-\sin(t) = \sin(x)$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{x} dx - \int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{x} dx = \int_0^{\pi} \left(\underbrace{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+\pi}}_{>0} \right) \underbrace{\sin(x)}_{\geq 0} dx > 0$$

לפי תרגיל בשיעורי הבית, האינטגרל של פונקציה חיובית הוא חיובי.

אז הראנו שהאינטגרל גדול מאפס.

תרגול 06

חדו"א 2

אינטגרל לא אמיתי

גיא רוזנדורן, 25/05/2008 08:02

תזכורת (נוסחת לייבניץ)

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

כאשר f רציפה:

$$F' = f$$

מסקנה (המשפט היסודי של חדו"א)

עבור f רציפה:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(b)$$

תרגול 06

חדו"א 2

אינטגרל לא אמיתי

גיא רוזנדורן, 25/05/2008 08:02

תרגיל

יש למצוא את הגבול:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x \cos(t^2)\,dt$$

נסמן $\phi(x)=\int_0^x \cos(t^2)\,dt$.

הגבול הזה הוא למעשה הנגזרת של $\phi(x)$ באפס:

$$\phi^{'}(0)=\frac{\phi(x)-\phi(0)}{x}=\frac{\phi(x)-0}{x}$$

אז לפי המשפט היסודי:

$$=\frac{d}{dx}|_{x=0}\int_0^x \cos(t^2)\,dt=\cos(t^2)_{t=0}=1$$

תזכורת (סימונים)

תהי $f:(a,b)\to R$ גזירה, ו $c\in(a,b)$. אז:

$$f^{'}(c)\equiv\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\equiv\frac{d}{dx}|_{x=0}f(x)\equiv\frac{df}{dx}|_{x=0}\equiv\frac{df}{dx}(x)$$

תרגיל:

נתונה $f\in C[a,b]$ ו $f\ge 0$. יש להראות:

$$\lim_{p\to+\infty}\left(\int_a^b f^p\right)^{\frac{1}{p}}=\max_{x\in[a,b]}f(x)$$

אינטואיטיבית, f^p ממש גדולה יחסית לפונקציה המקורית.

אם $f\equiv 0$ אין מה להוכיח.

נניח ש $f\not\equiv 0$, ובלי הגבלת הכלליות ש $\max(f)=1$. אז:

$$\lim_{p\to+\infty}\left(\int_a^b f^p\right)^{\frac{1}{p}}\le\lim_{p\to+\infty}\left(\int_a^b 1\right)^{\frac{1}{p}}=\lim_{p\to+\infty}(b-a)^{\frac{1}{p}}=1=\max(f)$$

ניקח $\epsilon>0$. נסמן $I_\epsilon\coloneqq\{x\in[a,b]|f(x)>1-\epsilon\}$. הקבוצה הזו לא ריקה (כיוון שנקודת המקסימום בפנים), ומכילה קטע פתוח בעל אורך חיובי (כיוון שהיא רציפה).

ניקח נקודה $J_\epsilon>0$. ניתן לרשום:

$$\lim_{p\to+\infty}\left(\int_a^b f^p\right)^{\frac{1}{p}}\ge\lim_{p\to+\infty}\left(\int_{J_\epsilon} f^p\right)^{\frac{1}{p}}\ge\lim_{p\to+\infty}\left(\int_{J_\epsilon}(1-\epsilon)^p\right)^{\frac{1}{p}}=\lim_{p\to+\infty}(|J_e|(1-\epsilon)^p)^{\frac{1}{p}}=\lim_{p\to+\infty}|J_\epsilon|^{\frac{1}{p}}(1-\epsilon)$$
$$=1-\epsilon$$

לכן:

$$\forall\epsilon.\lim_{p\to+\infty}\left(\int_a^b f^p\right)^{\frac{1}{p}}\ge 1-\epsilon=1$$

תרגיל (אי-שוויון Cauchy-Schwarz)

עבור $f,g \in R[a,b]$ מתקיים:

$$\left(\int_a^b |fg|\right)^2 \le \int_a^b |f|^2 + \int_a^b |g|^2$$

נזכר באי-שוויון קושי-שוורץ עבור סכומים:

$$|u,v|^2 \le |u|^2 + |v|^2$$

$$\left(\sum_{i=1}^n |a_i b_i|\right)^2 \le \sum_{i=1}^n |a_i|^2 + \sum_{i=1}^n |b_i|^2$$

עבור מספרים $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ כאשר $n \in \mathbb{N}$. אלה פונקציות אינטגרביליות, אז כל סכומי רימן שנבחר שואפים לאינטגרל, אם החלוקה עדינה מספיק. אז נסמן $T_N = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b\}$ כאשר $x_i = a + \frac{b-a}{N} i$, ונבחר עבור N ל N נקודה $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ אחת ולתמיד (בלי קשר ל f,g), ו $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = \frac{1}{N}$

נרשום סכומי רימן עבור שני האגפים, ונסמן $\alpha_i = f(\xi_i), \beta_i = g(\xi_i)$, אז:

$$\left(\sum_{T_N} |f(\xi_i) g(\xi_i)| \Delta x_i\right)^2 = \frac{1}{N^2}\left(\sum_{T_N} |\alpha_i \beta_i|\right)^2 \le \frac{1}{N^2}\sum_{T_N} |\alpha_i|^2 \sum_{T_N} |\beta_i|^2 = \sum_{T_N} |f(\xi_i)|^2 \Delta x_i \sum_{T_N} |g(\xi_i)|^2 \Delta x_i$$

נשאיף את N ל ∞:

$$\int |f|^2 * \int |g|^2 \ge \left(\int |fg|\right)^2$$

אינטגרלים לא אמיתיים

אינטגרל לא אמיתי מוגדר כאשר הפונקציה אינה חסומה ו/או תחום האינטגרציה אינו חסום

לדוגמא:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2} \quad , \quad \int_0^\infty e^{-x^2} dx$$

אז מה עושים?

נניח ש $f:(a,b] \to \mathbb{R}$ אינטגרבילית בכל קטע $[a+\epsilon, b]$.

האינטגרל הלא אמיתי יוגדר, אם קיים הגבול:

$$\int_a^b f := \lim_{\epsilon \to +0} \int_{a+\epsilon}^b f$$

אם $f:[a,\infty] \to \mathbb{R}$ אינטגרבילית בכל קטע $[a,B]$, $B > a$ אז נגדיר:

$$\int_a^\infty f := \lim_{B\to\infty} \int_a^B f$$

דוגמא

נראה אם האינטגרל מתכנס, ואם כן, מהו ערכו:

$$\int_0^1 \ln(x)\,dx = \lim_{x\to+0} \int_0^1 \ln(x)\,dx = \lim_{x\to+0} (x ln(x) - x)_\epsilon^1 = \lim_{x\to+\infty} (-1 - (\epsilon \ln(\epsilon) - \epsilon)) = -1$$