שיעור 09

מתמטיקה בדידה

פונקציות

גיא רוזנדורן, 01/06/2008 12:13

יחסים בינאריים

יחס אנטי-סימטרי

יחס S בקבוצה A ייקרא אנטי-סימטרי (חלש) אם ורק אם $\forall a,b \in A. aSb \wedge bSa \Rightarrow a=b$

יחס אנטי-סימטרי חזק מקיים גם $\forall a,b \in A. aSb \Rightarrow a \neq b$

במסגרת הקורס נדון באנטי-סימטריה חלשה

יחס סדר

יחס טרנזיטיבי, אנטי-סימטרי ורפלקסיבי ייקרא סדר.

דוגמאות

- $\geq$. אם S אנטי-סימטרי, כך גם S^{-1}.
- $>$. אם $a>b$ וגם $b>a$ אז $a=b$. התנאים האלה לא מתקיימים ביחד ולכן נובע מהם הכול.
- $=$
- $\subseteq^*$. לאחר התאמות של ההגדרות ל-"תיקון" פרדוקס ראסל.
- $\leq, =, \subseteq$ הם יחסי סדר.
- $<$ הוא לא סדר כי הוא לא רפלקסיבי. יחס כזה נקרא סדר חד\חריף, לא נדון ביחסים אלה.

פונקציות

יחסים מלאים וחד-ערכיים

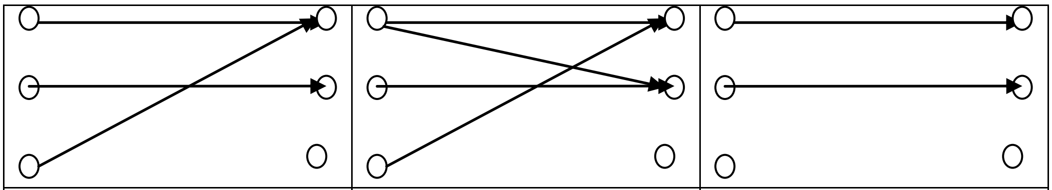
יחס S הוא יחס מלא מ A ל B אם ורק אם $\forall a \in A. \exists b \in B. aSb$.

לכל איבר של A יש לפחות בן זוג אחד ב B

יחס S מ A ל B הוא חד-ערכי אם ורק אם $\forall a \in A. \forall b_1, b_2 \in B. aSb_1 \wedge aSb_2 \Rightarrow b_1 = b_2$

לכל איבר של A בן זוג אחד לכל היותר, ונקרא גם פונקציה חלקית

דוגמאות



יחס לא מלא	יחס מלא יחס לא חד ערכי	יחס מלא יחס חד ערכי

יחס יכול להיות מלא מקבוצה A ל B אבל לא מלא מקבוצה אחרת המכילה את A.

שיעור 09

מתמטיקה בדידה

פונקציות

גיא רוזנדורן, 01/06/2008 12:13

הרכבות יחסים מלאים וחד-ערכיים

הרכבת יחסים מלאים היא יחס מלא

יהיו S מ-A ל-B, T מ-B ל-C יחסים מלאים, ויהיו $a \in A, c \in C$. צריך להוכיח ש $a(T \circ S)c$:
כיוון ש S יחס מלא, לכל $a \in A$ יש בן זוג ב B. כיוון ש T יחס מלא, לכל $b \in B$ יש בן זוג ב C.
לכן יש לכל $a \in A$ בן זוג ב C. לכן ההרכבה $T \circ S$ היא יחס מלא.

הרכבת יחסים חד-ערכיים היא יחס חד-ערכי

יהיו S מ-A ל-B, T מ-B ל-C יחסים חד-ערכים, ויהיו $a \in A, c \in C$.
כיוון ש S יחס חד-ערכי, לכל $a \in A$ יש לכל היותר בן זוג אחד ב B. כיוון ש T יחס חד-ערכי, לכל $b \in B$ יש לכל היותר בן זוג אחד ב C. כלומר, לכל $a \in A$ יש לכל היותר בן זוג אחד ב C. ההרכבה חד-ערכית.

פונקציה

יחס מלא וחד-ערכי מ A ל B ייקרא פונקציה מ A ל B.
יחס הוא פונקציה אם ורק אם לכל איבר ב A בן זוג אחד ויחיד.
בן הזוג היחיד של איבר a מתוך A בפונקציה f מ A ל B יסומן f(a).
את קבוצת הפונקציות מ A ל B נסמן B^A או $A \to B$.
בצמוד לסימון זה, ישמש הסימון ":" לסימון השייכות ∈, כלומר, $f: A \to B$.
פירוש f פונקציה כאשר $f: A \to B$, A תקרא התחום של f ו B היא טווח של f.
לאותה פונקציה f ייתכנו טווחים שונים.
הטווח המינימאלי $\{b \in B | \exists a \in A. f(a)b\}$ ייקרא התמונה של f

סימון? ?

פונקציה מקבוצה A המתאימה לאיבר x מתוך A את בן הזוג T (בד"כ תבנית המכילה את המשתנה x) מסומנת ע"י $\lambda x \in A.T$.

כללים פורמאליים של תחשיב? ?

כלל α – החלפת משתנים – $\lambda x.T = \lambda y.T(y|x)$ כאשר אין הופעה חופשית של y ב T.
כלל β – כלל הצבה – $\lambda x.T(t) = T)t|x)$ כאשר t ביטוי מתאים להצבה במקום x ב T
כלל η – שוויון של פונקציות – $f = \lambda x. f(x)$ נחוץ לשמירה על טהרת הפורמליזם.

דוגמאות

- התחום של הפונקציה $\lambda x \in \mathbb{R}. x^2$ הוא $\mathbb{R}$, הטווח הוא $\mathbb{R}$ והתמונה היא $\mathbb{R}^+$ כולל אפס.
- התחום של הפונקציה $\lambda n \in \mathbb{N}. \frac{1}{n}$ הוא $\mathbb{N} \backslash \{0\}$, הטווח הוא $\mathbb{R}$ והתמונה היא $\mathbb{Q}$ או $(0,1]$.
- התבנית $\lambda x \in R. ax^2$ היא תבנית פונקציה ולא פונקציה, כי צריך או להציב משהו ב a או לקשור אותו. התחום והטווח הם $\mathbb{R}$.
- התחום של הפונקציה $\lambda < a, x > \in \mathbb{R}. ax^2$ הוא $\mathbb{R}^2$ - זוג של מספרים, והטווח הוא $\mathbb{R}$.
- התחום של הפונקציה $\lambda a \in \mathbb{R}. (\lambda x \in \mathbb{R}. ax^2)$ הוא $\mathbb{R}$ והטווח הוא פונקציה $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
- התחום של הפונקציה $\lambda f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}. (\lambda y \in \mathbb{R}. f'(y))$ הוא פונקציות מ $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ וגם הטווח.
- $\lambda x. x^2(7) = 7^2$, $(\lambda a \in \mathbb{R}. (\lambda x \in \mathbb{R}. ax^2))(7) = \lambda x \in \mathbb{R}. 7x^2$
- $\left((\lambda a \in \mathbb{R}. (\lambda x \in \mathbb{R}. ax^2))(7)\right)(3) = (\lambda x \in \mathbb{R}. 7x^2)(3) = 7 * 3^2$

שיעור 09

מתמטיקה בדידה

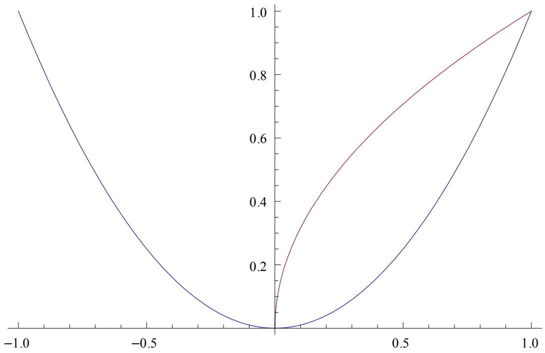
פונקציות

גיא רוזנדורן, 01/06/2008 12:13

גרף של פונקציה

פונקציה מ $\mathbb{R}$ ל $\mathbb{R}$ היא הגרף שלה.

נסתכל על $\lambda x \in \mathbb{R}. x^2$ ועל $\lambda x \in \mathbb{R}^+ . \sqrt{x}$:



הרכבת פונקציות

הרכבת פונקציות היא פונקציה (כי הרכבת יחסים מלאים וחד-ערכיים היא יחס מלא וח"ע).

תהינה $f: A \to B$, $g: B \to C$. לפי ההגדרה של הרכבת יחסים, $g \circ f: A \to C = \lambda a \in A. g\big(f(a)\big)$.

דוגמאות

$$f = \lambda x \in \mathbb{R}. 5x + 7$$

$$g = \lambda y \in \mathbb{R}. \frac{(y-7)}{5}$$

$$g \circ f = \lambda x \in \mathbb{R}. g\big(f(x)\big) = \lambda x \in \mathbb{R}. g(5x+7) = \lambda x \in \mathbb{R}. \left(\frac{5x+7-7}{5}\right) =$$

$$= \lambda x \in \mathbb{R}. x$$

זאת פונקצית הזהות.

לכל קבוצה A לעצמה מוגדרת פונקצית הזהות $I_A = \lambda a \in A. a$

$$f \circ g = \lambda y \in \mathbb{R}. f\big(g(x)\big) = \lambda y \in \mathbb{R}. f\left(\frac{y-7}{5}\right) = \lambda y \in \mathbb{R}. \left(5\frac{(y-7)}{5} + 7\right) = \qquad (1)$$

$$= \lambda y \in \mathbb{R}. y$$

כלומר, f, g יחסים הופכיים.

פונקציה $f: A \to B$ תיקרא חד-חד-ערכית (חח"ע) אם ורק אם היחס ההופכי f^{-1} הוא חד-ערכי (פונקציה חלקית).

כלומר, $\forall a_1, a_2. a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq (fa_2)$.

$f: A \to B$ תיקרא פונקציה מ A על B אם ורק אם היחס ההופכי f^{-1} (לא בהכרח פונקציה) הוא יחס מלא מ B ל-A.

כלומר, $\forall b \in B. \exists a \in A. f(a) = b$.

משפט

הרכבת פונקציות חח"ע היא פונקציה חח"ע: $(f \circ g)^{-1} = (g^{-1} \circ f^{-1})$.

מאותה סיבה, הרכבת פונקציות על (על הטווח שלהן) היא פונקציה על (הטווח שלה).

אבחנה טריוויאלית

תהא פונקציה $f: A \to B$***, ו*** f^{-1} ***היא פונקציה*** $f^{-1}: B \to A$ ***אם ורק אם*** f ***חח"ע מ A על B.***

שיעור 09

מתמטיקה בדידה

פונקציות

גיא רוזנדורן, 01/06/2008 12:13

תוכן עניינים

שיעור 09
מתמטיקה בדידה
פונקציות
גיא רוזנדורן, 01/06/2008 12:13

תקציר משפטים, נוסחאות והדגשים

יחס S בקבוצה A ייקרא אנטי-סימטרי (חלש) אם ורק אם $\forall a,b \in A. aSb \wedge bSa \Rightarrow a = b$
יחס אנטי-סימטרי חזק מקיים גם $\forall a,b \in A. aSb \Rightarrow a \neq b$
יחס טרנזיטיבי, אנטי-סימטרי ורפלקסיבי ייקרא סדר.
יחס S הוא יחס מלא מ A ל B אם ורק אם $\forall a \in A. \exists b \in B. aSb$.
לכל איבר של A יש לפחות בן זוג אחד ב B
יחס S מ A ל B הוא חד-ערכי אם ורק אם $\forall a \in A. \forall b1, b2 \in B. aSb1 \wedge aSb2 \Rightarrow b1 = b2$
לכל איבר של A בן זוג אחד לכל היותר, ונקרא גם פונקציה חלקית

הרכבת יחסים מלאים היא יחס מלא
הרכבת יחסים חד-ערכיים היא יחס חד-ערכי
יחס מלא וחד-ערכי מ A ל B ייקרא פונקציה מ A ל B.
יחס הוא פונקציה אם ורק אם לכל איבר ב A בן זוג אחד ויחיד.
בן הזוג היחיד של איבר a מתוך A בפונקציה f מ A ל B יסומן f(a).
את קבוצת הפונקציות מ A ל B נסמן BA או $\boldsymbol{A \rightarrow B}$.
בצמוד לסימן זה, ישמש הסימן ":" לסימן השייכות $\in$, כלומר, $f: A \rightarrow B$.
פירוש f פונקציה כאשר $f: A \rightarrow B$, A תקרא התחום של f ו B היא טווח של $\boldsymbol{f}$.
לאותה פונקציה f ייתכנו טווחים שונים.
הטווח המינימאלי $b \in B \exists a \in A. fab$ ייקרא התמונה של f
פונקציה מקבוצה A המתאימה לאיבר x מתוך A את בן הזוג T (בד"כ תבנית המכילה את המשתנה x) מסומנת ע"י $\lambda x \in A. T$.
כלל α – החלפת משתנים – $\lambda x. T = \lambda y. T(y|x)$ כאשר אין הופעה חופשית של y ב T.
כלל $\boldsymbol{\beta}$ – כלל הצבה – $\boldsymbol{\lambda x. Tt = T)tx}$ כאשר t ביטוי מתאים להצבה במקום x ב T
כלל η – שוויון של פונקציות – $\boldsymbol{f = \lambda x. f(x)}$ נחוץ לשמירה על טהרת הפורמליזם.
פונקציה מ $\mathbb{R}$ ל $\mathbb{R}$ היא הגרף שלה.
הרכבת פונקציות היא פונקציה (כי הרכבת יחסים מלאים וחד-ערכיים היא יחס מלא וח"ע).
תהינה $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$. לפי ההגדרה של הרכבת יחסים, $g \circ f: A \rightarrow C = \lambda a \in A. gfa$.
מכל קבוצה A לעצמה מוגדרת פונקצית הזהות $\boldsymbol{IA = \lambda a \in A. a}$
פונקציה $f: A \rightarrow B$ תיקרא חד-חד-ערכית (חח"ע) אם ורק אם היחס ההופכי $f - 1$ הוא חד-ערכי (פונקציה חלקית).
כלומר, $\forall \boldsymbol{a1, a2. a1 \neq a2 \Rightarrow fa1 \neq fa2}$.
$f: A \rightarrow B$ תיקרא פונקציה מ A על B אם ורק אם היחס ההופכי $f - 1$ (לא בהכרח פונקציה) הוא יחס מלא מ B ל-A.
כלומר, $\forall \boldsymbol{b \in B. \exists a \in A. fa = b}$.
הרכבת פונקציות חח"ע היא פונקציה חח"ע: $(g - 1 \circ f - 1) = f \circ g - 1$.
מאותה סיבה, הרכבת פונקציות על (על הטווח שלהן) היא פונקציה על (הטווח שלה).
תהא פונקציה $f: A \rightarrow B$, ו $f - 1$ היא פונקציה $f - 1: B \rightarrow A$ אם ורק אם f חח"ע מ A על B.