שיעור 09

מבוא להסתברות

[Comments]

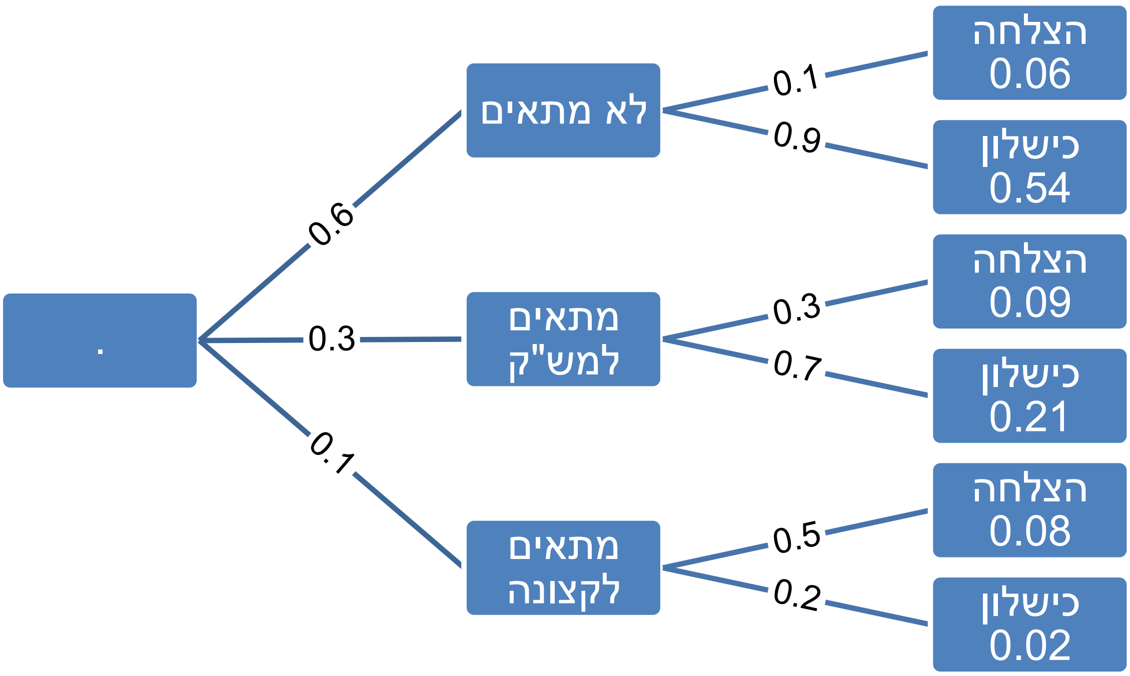
גיא רוזנדרן, 01/06/2008 14:13

נוסחת ההסתברות השלמה

מתגייסים לצה"ל

בית המתגייסים לצה"ל ידוע כי 60% לא מתאימים לתפקידי פיקוד. 30% מתאימים לתפקיד מש"קים, ו-10% מתאימים לקצונה. הצבא מעוניין לדעת האם מתגייס מתאים לקצונה, ומעביר אותם למבדקי קצונה. הסיכוי להצליח במבדקים הוא: 0.1 בין הלא מתאימים לפיקוד, 0.3 בין המתאימים למש"קים, 0.8 בין המתאימים לקצונה.

נצייר את תרשים העץ:



א. כמה המבדקים האלה קשים? כלומר, מה הסיכוי של מתגייס להצליח במבדקים?

הסיכוי להצליח במבחן הוא:

ב. מה הסיכוי שמתגייס מתאים לקצונה אם ידוע שעמד במבדקים בהצלחה?

אפריורי, הסיכוי שבנאדם מתאים לקצונה הוא 10%.

אפוסטריורי: רוצים לחשב את הסיכוי שבנאדם

$$P(\text{מתאים לקצונה}|\text{הצלחה}) = \frac{0.08}{0.23}\sim\frac{1}{3}$$

שיעור 09

מבוא להסתברות

[Comments]

גיא רוזנדורן, 01/06/2008 14:13

נוסחת Bayes

יהי $A_1,\dots,A_n$ מאורעות זרים בזוגות שאיחודים הוא מרחב המדגם $\cup_{i=1}^{n} A_i=\Omega$.

יהי B מאורע כלשהו. אז:

$$P(A_i|B)=\frac{P(B|A_i)P(A_i}{\sum_{j=1}^{n}P(B|A_j)P(A_j)}$$

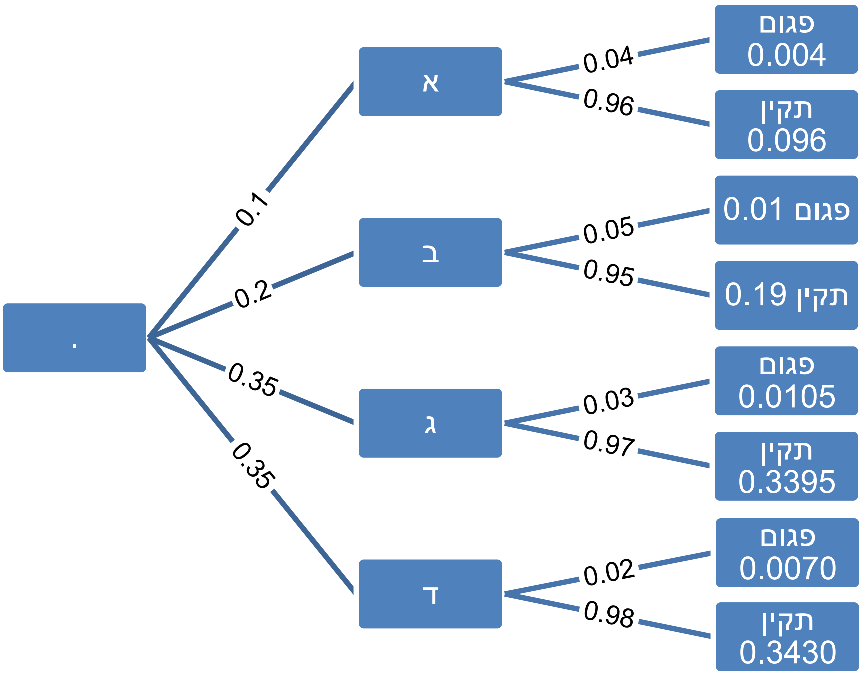
לפי ההגדרה, $P(A_i|B)=\frac{P(A_i\cap B)}{P(B)}$. לפי נוסחת ההסתברות השלמה: $P(B)=\sum_{j=1}^{n}P(B|A_j)P(A_j)$,
ולפי נוסחת הכפל: $P(C\cap D)=P(C|D)P(D)$.

דוגמאות

בית חרושת

בבית חרושת פועלות 4 מכונות. מכונה א' מייצרת 10% מהמוצרים, מהם 4% פגומים, מכונה ב' מייצרת 20% מהמוצרים, מהם 5% פגומים. מכונה ג' מייצרת 35% מהמוצרים, מהם 3% פגומים.
מכונה ד' מייצרת 35% מהמוצרים, מהם 2% פגומים.
ידוע כי מוצר שנוצר בבית החרושת פגום. מהי ההסתברות שהוא יוצר במכונה ב'?

נצייר תרשים עץ:



אז:

$$P(A)=\frac{0.01}{0.004+0.01+0.105+0.007}$$

שיעור 09

מבוא להסתברות

[Comments]

גיא רוזנדורן, 01/06/2008 14:13

שאלה

בהינתן שני מאורעות A,B, מתי מתקיים $P(B)=P(B|A)$? כלומר, מתי האינפורמציה ש- A קרה לא משנה את ההסתברות? נסתכל על ההגדרה של ההסתברות המותנה ונראה:

$$P(B)=P(B|A)$$

$$P(B)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}\Leftrightarrow P(A\cap B)=P(A)P(B)$$

כלומר, $P(A)P(B)$ זהו יחס סימטרי, כלומר ההסתברות ש A קרה לא משפיע על ההסתברות של B, ולהפך. כלומר, המאורעות A,B מאורעות בלתי תלויים.

מאורעות בלתי-תלויים

אומרים כי המאורעות B,A הם בלתי תלויים אם ההסתברות של $P(A\cap B)=P(A)P(B)$.

למשל, בהטלת קובייה סימטרית, נגדיר שני מאורעות: $A=\{2,4,6\}$ ו $B=\{1,2\}$.

מאחר והקובייה היא סימטרית, ההסתברות האפריורית של B היא $\frac{1}{3}$., והאפוסטריורית $P(B|A)=\frac{1}{3}$.

ההסתברות האפריורית של A היא $\frac{1}{2}$, וההסתברות האפוסטריורית $P(A|B)=\frac{1}{2}$.

במקרה הזה: $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\mathrm{P}(\{2\}=\frac{1}{6}=P(A)P(B)=\frac{1}{2}*\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$.

הערות

לא להתבלבל בין מאורעות זרים ומאורעות בלתי-תלויים. מאורעות זרים הם תליים.

מאורעות שהם לא זרים, יכולים להיות תלויים ובלתי-תלויים.

אי-התלות היא בכך שהמידע שמאורע מסוים קרה או לא קרה, לא משפיע על העובדה שהמאורע האחר קרה או לא קרה. כלומר, אם ידוע ש $P(A\cap B)=P(A)P(B)$ שזו בעצם ההגדרה לכך ששניהם בת"ל, אז גם $\overline{A},\overline{B}$ בלתי תלויים:

$$P(A\cap\overline{B})=P(A)P(\overline{B})$$

$$P(\overline{A}\cap B)=P$$

תוכן עניינים

תקציר משפטים, נוסחאות והדגשים

יהיו $\boldsymbol{An}, \dots, \boldsymbol{A1}$ מאורעות זרים בזוגות שאיחודים הוא מרחב המדגם $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{1nAi} = \boldsymbol{i} \cup$.
יהי $\boldsymbol{B}$ מאורע כלשהו. אז:
$\boldsymbol{PAiB} = \boldsymbol{PBAiP}(\boldsymbol{Ai}\, \boldsymbol{j} = \boldsymbol{1nPBAjPAj}$
אומרים כי המאורעות B,A הם בלתי תלויים אם ההסתברות של $\boldsymbol{PA} \cap \boldsymbol{B} = \boldsymbol{PAP}(\boldsymbol{B})$.
לא להתבלבל בין מאורעות זרים ומאורעות בלתי-תלויים. מאורעות זרים הם תליים.
מאורעות שהם לא זרים, יכולים להיות תלויים ובלתי-תלויים.
אי-התלות היא בכך שהמידע שמאורע מסוים קרה או לא קרה, לא משפיעה על העובדה שהמאורע האחר קרה או לא קרה. כלומר, אם ידוע ש $\boldsymbol{PA} \cap \boldsymbol{B} = \boldsymbol{PAPB}$ שזו בעצם ההגדרה לכך ששניהם בת"ל, אז גם $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ בלתי תלויים: