שיעור 09

אלגברה ליניארית 2

[Comments]

גיא רוזנדורן, 10:12 02/06/2008

תת-מרחב אינווריאנטי

תרגיל

אם $f \in F[x]$ אז $f(T) = 0$ אם ורק אם $m_T | f$.

הוכחה: הוכחנו שאם $C \in M_n(F)$ אז $f(C) = 0$ אם ורק אם $m_C | f$.

יהי B בסיס כלשהו של V. נסמן $C = [T]_B^B$, והיה לנו תרגיל: $[f(T)]_B^B = f(C)$.

לכן $f(T) = 0$ אם ורק אם $f(C) = [f(T)]_B^B = 0$, וזה אם ורק אם $m_T = m_C | f$. מש"ל.

תרגיל בית

יהי W תת-מרחב אינווריאנטי-T של V. יהיו שני פולינומים $f, g \in F[x]$.

ב. הוכח כי $f(T)(W)$ הוא אינווריאנטי-$g(T)$.

ג. אם $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_r$ באשר $W_1, \dots, W_r$ ת"מ אינווריאנטים, אז $f(T)(V) = f(T)(W_1) \oplus \dots \oplus f(T)(W_r)$.

משפט

נניח ש V הוא סכום ישר של תתי-מרחבים: $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_r$.

אז לכל $1 \le i \le r$ יהי $B_i = (w_{i1} \quad w_{i2} \quad \cdots \quad w_{in_i})$ בסיס של W_i כך ש:

$B = (w_{11} \quad \cdots \quad w_{1n_1} \quad w_{21} \quad \cdots \quad w_{2n_2} \quad \cdots \quad w_{r1} \quad \cdots \quad w_{rn_r})$ הוא בסיס של V. אז:

א. $W_1, \dots, W_r$ תתי-מרחבים אינווריאנטיים-T אם ורק אם $[T]_B^B = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_n \end{pmatrix}$ באשר $A_i \in M_{n_i}(F)$.

ב. אם זה קורה, אז $A_i = [T|w_i]_{B_i}^{B_i}$.

אם $W_i = Sp(w_{i1}, \dots, w_{in_i})$ אז הוא אינווריאנטי-T אם ורק אם $T(w_{ij}) \in Sp(w_{i1}, \dots, w_{in_i})$ לכל j, אם ורק אם:

$$[T(w_{ij})]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \left.\vphantom{\begin{matrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{matrix}}\right\} n_i \Leftrightarrow [T]_B^B = \begin{pmatrix} A_1 & & & & 0 \\ & A_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & A_r \end{pmatrix}$$

לפי הסימון ב-(א): $T|w_i(w_{ij}) = T(w_{ij}) = a_1 w_{i1} + \cdots + a_{n_i} w_{in_i}$. כלומר, העמודה ה- j של $[T|w_i]_{Bi}^B$ היא $(a_1, \dots, a_{n_i}) =$ העמודה ה-j של A_i ולכן $A_i = [T|w_i]_{B_i}^{B_i}$.

שיעור 09

אלגברה ליניארית 2

[Comments]

גיא רוזנדורן, 02/06/2008 10:12

מסקנה

נניח** $V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_r$, W_i **אינווריאנטי-T, נסמן** $T_i = T|w_i$ **אז:

$$\boldsymbol{f_T(X) = f_{T1}(X) * \ldots * F_{Tr}(X)}$$

$$\boldsymbol{m_T(X) = lcm\left(m_{T_1}(X), \ldots, M_{T_r}(X)\right)}$$

תהי $A = [T]_B^B$, כאשר B_i, B כמו במשפט. אז $m_T = m_A, f_T = f_A, m_{T_i} = m_{A_i}, f_{T_i} = m_{A_i}$.

למדנו שעבור $A = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_n \end{pmatrix}$ מתקיים: $f_A = fA_1 * \ldots * f_{A_r}, m_A = \mathrm{lcm}(mA_1, \ldots, mA_r)$. משל.

למה

יהי $W \subseteq V$ ת"מ אינווריאנטי-T, יהי $S = T|w : W \to W$. אז:

(א) לכל $f \in F[x]$ ולכל $w \in W$ מתקיימי $f(S)(w) = f(T)(w)$.

(ב) $m_S | m_T$.

הוכחה:

(א) תחילה נראה, באינדוקציה על i כלשהו, כי $S^i(w) = T^i(w)$ לכל $i \geq 0$.

עבור $i = 0$: $S^0 = 1_w(w) = w = T^0 = 1_v(w)$.

נניח $S^{i-1}(w) = T^{i-1}(w) \in W$, אז:

$$S^i(w) = S\left(S^{i-1}(w)\right) = S\left(T^{i-1}(w)\right) = T\left(T^{1-i}(w)\right) = T^i(w)$$

אם $f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, אז:

$$f(S)(w) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i S^i\right)(w) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i S^i(w) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i T^i(w) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i T^i\right)(w) = F(T)(w)$$

(ב) לפי התרגיל, דיי להוכיח $m_T(S) = 0$, ואכן:

$$\forall w \in W\,.\; m_T(S)(w) = m_T(T)(w) = 0(w) = 0 \Rightarrow m_T(S) = 0$$

משפט

יהיו שני פולינומים** $g, h \in F[x]$ **זרים (** $\gcd(g,h) = 1$**). נניח** $(gh)(T) = 0$ **אז** $V = \ker g(T) \oplus \ker h(T)$, **ואמרנו ש** $\ker g(T), \ker h(T)$ **הם אינווריאנטים-T.

הוכחה:

היות ו $\gcd(gh) = 1$, לכן (היה בתרגול) יש שני פולינומים $r, s \in F[x]$כך ש $rs + sh = 1$. כלומר:

$$(1) \quad r(T)g(T) + s(T)h(T) = 1_V$$

יהי $v \in V$. אז:

טענה: $r(T)g(T)(v) \in \ker h(T)$. אכן: $h(T)r(T)g(T)(v) = r(T)g(T)h(T)(v) = r(T)(gh)(T)(v)$.

אבל לפי ההנחה $(gh)(T) = 0$, ולכן $h(T)r(T)g(T)(v) = 0$.

באותו אופן, $s(T)h(T)(v) \in \ker g(T)$. לכן:

$$(2) \quad \mathrm{v = u + w} \qquad \mathrm{u \in \ker g(T)\,, w \in \ker h(T)}$$

נראה שיש הצגה יחידה ל-(2). נניח שיש הצגה (2) כך ש:

$$r(T)g(T)(v) = \underbrace{r(T)g(T)(u)}_{=0} + r(T)g(T)(w) = r(T)g(T)(w)$$

נפעיל את שני האגפים של (1) על w:

$$w = 1_V(w) = r(T)g(T)(w) + \underbrace{s(T)h(T)(w)}_{=0} = r(T)g(T)(w)$$

מזה ששני האגפים שווים, יוצא ש $w = r(T)g(T)(v)$, לכן w יחיד, ונקבע ע"י v. באופן דומה גם u יחיד.

מסקנה

בתנאי המשפט, נסמן ב T_1, T_2 את הצמצומים של T ל $\ker g(T), \ker h(T)$ בהתאמה.
נניח $gh = m_T$ ו- g, h מתוקנים. אז $m_{T_1} = g, m_{T_2} = h$.

הוכחה:
$g(T_1) = 0$, כי לכל $u \in \ker g(T)$, ו $g(T_1)(u) = g(T)(u) = 0$. לכן $m_{T_1}|g$. לכן $g = rm_{T_1}$, $r \in F[x]$, ולכן בהכרח r מתוקן. באותו אופן $h = sm_{T_2}$, s מתוקן. כעת $rsm_{T_1}m_{T_2} = gh = m_T = \mathrm{lcm}(m_{T_1}, m_{T_2}) | m_{T_1}m_{T_2}$.
מכאן $rs = 1$, והיות והם מתוקנים $r = s = 1$.

הפירוק הפרימרי

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F, ותהי T:V→V העתקה ליניארית כך ש $m_T = g_1 * \ldots * g_r$, באשר $g_1, \ldots, g_r \in F[x]$ פולינומים מתוקנים וזרים זה לזה (gcd של כל שניים מהם הוא 1). נסמן $w_i = \ker g_i(T)$ אזי:
(א) $V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_r$, W_i אינווריאנטי-T
(ב) $m_T|w_i = g_i$ לכל i.

הוכחה: נוכיח באינדוקציה על r. אם $r = 1$, אז $W_1 = \ker m_T(T) = V$ והכול מתקיים.
נניח נכונות עבור $r - 1$, אז $m_T = g_1(g_2 * \ldots * g_r)$ כאשר $g_1, \ldots, g_r$ זרים. לפי המשפט $V = W_1V'$, באשר $V' = \ker(g_1 * \ldots * g_r)(T)$, ו $W_1 = \ker(g_1(T))$ אינווריאנטי-T.
נסמן $S = T|_{V'}$, $T_1 = T|_{W_1}$. לפי המסקנה $m_{T_1} = g_1, m_S = g_2 * \ldots g_r$.
לפי הנחת האינדוקציה $V' = W_2 \oplus \ldots \oplus W_r$, באשר $W_i = \ker g_i(S)$ ו $m_{S|_{W_i}} = g_i$ לכל $i = 2, \ldots, r$. אז:

$$\ker g_i(T) \subseteq \ker g_2(T) \circ \ldots \circ g_r(T) = \ker(g_2 * \ldots * g_r)(T) = V'$$

לכן:

$$\ker g_i(T) = \{v \in V' | g_i(T)(v) = 0\} = \{v \in V' | g_i(S)(v) = 0\} = \ker g_i(S)$$

וברור ש $T|_{w_i} = S|_{w_i}$. מכאן $V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_r$ ו $g_i = m_{T|_{W_i}}$ לכל $1 \le i \le r$.

משפט

יש בסיס B של V כך ש $[T]_B^B$ אלכסונית אמ"מ $m_T = (X - \mu_1) * \ldots * (X - \mu_r)$ באשר $\mu_i \in F$ שונים.

הוכחה:
כיוון ⇐: נניח $A = [T]_B^B$. אז: $\mathrm{lcm}(X - \lambda_1, \ldots, X - \lambda_n) = \mathrm{lcm}(m_{\lambda_1}, \ldots, m_{\lambda_n}) = m_T = m_A$. לכן $m_T = (X - \mu_1) * \ldots * (X - \mu_r)$ באשר $\mu_1, \ldots, \mu_r$ שונים זה מזה. כיוון ⇒: לפי המשפט, $V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_r$, באשר $W_i = \ker(T - \mu_i 1_V) = V_{\mu_i}$. זה אומר שצירוף הבסיסים של $V_{\mu_1}, \ldots, V_{\mu_r}$ הוא בסיס של V, כלומר יש בסיס B של V שמורכב מוקטורים עצמיים, ואז $[T]_B^B$ אלכסונית.

מסקנה

מטריצה $A \in M_n(F)$ דומה לאלכסונית אם ורק אם הפולינום המזערי הוא:
$m_A(X) = (X - \mu_1) * \dots * (X - \mu_r)$, באשר $\mu_1, \dots, \mu_r$ שונים זה מזה.