שיעור 10

מתמטיקה בדידה
[Comments]
גיא רוזנדורן, 02/06/2008 17:08

כללים פורמאליים של תחשיב? ?

תרגיל ממבחן

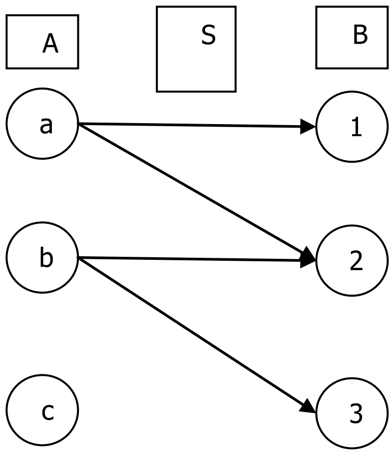
יהא S יחס מ-A ל-B. נגדיר יחס $\tilde{S}$ מ-A ל-P(B) כלהלן: $\tilde{S} = \{< a \in A, \{b \in B| < a,b >\in S\} >\}$.

א. באילו תנאי היחס $\tilde{S}$ הוא פונקציה?

$\tilde{S}$ צריך להיות יחס מלא וחד-ערכי, כלומר לכל איבר מתוך A, קיימת קבוצה אחת ויחידה מ P(B) שהיא בת זוגה, וזה מתקיים תמיד.

במלים אחרות, היחס הזה הוא פונקציה המתאימה לכל איבר על A את קבוצת האיברים ב B המקיימים איתו את היחס S. לכל a קבוצה אחת כזו לכן זו תמיד פונקציה.

נסתכל על הדוגמא:



$$\tilde{S} = \{< a, \{1,2\} >, < b, \{2,3\} >, < c, \emptyset >\}$$

ב. אם בנוסף, לכך B=A ו-S הוא יחס שקילות, באיזה תנאי $\tilde{S}$ היא פונקציה חח"ע?

כאשר S הוא יחס שקילות, $\tilde{S}$ מתאימה לכל איבר ב A את מחלקת השקילות שלו.

לכן, $\tilde{S}$ היא פונקציה חח"ע אם לא קיימים שני איברים שונים בעלי אותה מחלקת שקילות, כלומר, כאשר כל איבר מקיים את S רק אם עצמו – כאשר S הוא יחס הוא השוויון.

ג. מתי היחס $\tilde{S}$ הוא על? אף פעם לא, והנימוק הוא משפט קנתור שעוד נלמד.

אבחנה טריוויאלית

תהא פונקציה $f: A \to B$, ו f^{-1} היא פונקציה $f^{-1}: B \to A$ אם ורק אם f חח"ע מ A על B.

דוגמא

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ $\qquad g: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

$f = \lambda x \in R. x^2$ $\qquad g: \lambda y \in \mathbb{R}^+. \sqrt{y}$

$$f \circ g = \lambda y \in \mathbb{R}^+. f(g(y)) = \lambda y \in \mathbb{R}^+. f(\sqrt{y}) = \lambda y \in \mathbb{R}^+. \sqrt{y}^2 = \lambda y \in \mathbb{R}^+. y = I_{\mathbb{R}^+}$$

$$g \circ f = \lambda x \in \mathbb{R}. g(f(y)) = \lambda x \in \mathbb{R}. g(x^2) = \lambda x \in \mathbb{R}. \sqrt{x^2} = \lambda x \in \mathbb{R}. |x|$$

f היא על הטווח (לכל ערך בטווח – החיוביים, יש בן זוג), לא חח"ע. g היא לא על (הטווח הוא המספרים הממשיים, ולא המספרים האי-שליליים) , אבל כן חח"ע (אין שני מספרים חיוביים שלהם אותו שורש).

שיעור 10

מתמטיקה בדידה

[Comments]

גיא רוזנדורן, 02/06/2008 17:08

פונקציה הופכית

לכל פונקציה על $f: A \to B$ קיימת $g: B \to A$ כך ש $f \circ g = I_B$, כלומר f הפיכה מימין.
לכל $g: B \to A$ חח"ע קיימת $f: A \to B$ כך ש $f \circ g = I_B$, כלומר g הפיכה משמאל.
$f: A \to B$ נקראת הפיכה (חח"ע ועל) אם ורק אם יש פונקציה $g: B \to A$ כך ש $g \circ f = I_A$, $f \circ g = I_B$.
קיימת רק פונקציה g אחת כזו והיא הפונקציה ההופכית f^{-1}.

תרגיל

הוכח ש $\lambda x.5x+7$ היא הפיכה מ $\mathbb{R}$ ל $\mathbb{R}$.
אפשר להוכיח שהיא חח"ע ועל, אבל יהיה יותר קל למצוא (לנחש) את הפונקציה ההופכית ולהרכיב:
אפשר להציג את פונקציה כהרכב של הכפלה ב-5 והוספה של 7. את ההופכית תהיה:

$$f^{-1} = \lambda y \in \mathbb{R}.\frac{y-7}{5}$$

חישבו אתמול את $g \circ f$ ואת $f \circ g$ וקיבלנו את $I_{\mathbb{R}}$. מ.ש.ל.

פונקציות קורי Curry

דוגמאות

$$\lambda < a,x > \in \mathbb{R}^2.ax^2$$
$$\lambda a \in \mathbb{R}.(\lambda x.ax^2)$$
$$\lambda < f,x > \in (\mathbb{R} \to \mathbb{R})x\mathbb{R}.f'(x)$$
$$\lambda f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}.\left(\lambda x \in \mathbb{R}.f'(x)\right)$$

טבלת הציונים: A שורות תלמידים, B טורים של קורסים, אז $f: (A \times B) \to C$ היא טבלת הציונים דו-מימדי.
הפונקציות $g: A \to (B \to C)$, ו $h: B \to (A \to C)$ חותכות את הטבלה לפרוסות ציונים לכל תלמיד ומורה.

הגדרה

פונקציית קורי $C_u^{A,B,C}$ היא פונקציה מ $(A \times B) \to C$ ל $A \to (B \to C)$ המתאימה לפונקציה בשני משתנים את הפונקציה הקבלת את המשתנה הראשון ומחזירה פונקציה במשתנה השני.

$$C_u = \lambda f: (A \times B) \to C.\left(\lambda a \in A.\left(\lambda b \in b.f(a,b)\right)\right)$$

נמצא את הפונקציה ההופכית:
צריכה לקבל פונקציה שמתאימה לכל תלמיד את השורה שלו, ומדביקה את כל השורות לטבלה:

$$C_u^{-1} = \lambda g: A \to (B \to c).\lambda < a,b > \in A \times B.\left(g(a)\right)(b)$$

בכדי להוכיח שאלו אכן פונקציה וההופכית לה, יש להראות שבהרכבה, בשני הכיוונים, מתקבלות פונקציות הזהות המתאימות. לשם קיצור, נסכים ש $f: (A \times B) \to C$, $g: A \to (B \to C)$, $a \in A$, $b \in B$ ו $c \in C$

$$C_u \circ C_u^{-1} = \lambda g.C_u\left(C_u^{-1}(g)\right) \overset{*}{\cong}$$
$$\overset{*}{\cong} \lambda g.C_u\left(\lambda < a,b >.\left(g(a)\right)(b)\right) \overset{**}{\cong} \lambda g.\left(\lambda a.\left(\lambda b.\left(\lambda < a,b >.\left(g(a)\right)(b)\right)\right)\right)(< a,b >) \overset{**}{\cong}$$
$$\overset{**}{\cong} \lambda g.\left(\lambda a.\left(\lambda b.\left(g(a)\right)(b)\right)\right) \overset{***}{\cong} \lambda g.\left(\lambda a.g(a)\right) \overset{***}{\cong} \lambda g.(g) = I_{A \to (B \to C)}$$

* הגדרת ההרכבה, ** כלל ביטא, *** כלל איתא

שיעור 10

מתמטיקה בדידה
[Comments]
גיא רוזנדורן, 02/06/2008 17:08

מסקנה

לכל שלוש קבוצות C,B,A הראינו קיום פונקציה הפיכה מ $(A \times B) \to C$ ל $A \to (B \to C)$,
או סימון חלופי: מ $C^{A\times B}$ ל $(C^B)^A$, וזו אחת מפעולות האריתמטיות של החזקות.

יחס הפונקציה ההפיכה

היחס בין קבוצות שיש ביניהן פונקציה הפיכה הוא סימטרי, רפלקסיבי, טרנזיטיבי.
סימטרי, כי אם $f: A \to B$ הפיכה אז $f^{-1}: B \to A$.
רפלקסיבי, כי $I_A: A \to A$.
טרנזיטיבי, כי $f: A \to B\,,\ g: B \to A \Rightarrow g \circ f: A \to C$
כלומר, היחס הזה הוא יחס שקילות.

נסמן $A \sim B$ אם ורק אם קיימת פונקציה הפיכה $f: A \to B$.

עוצמה

העוצמה של קבוצה A מסומנת ב |A| והיא מחלקת כל הקבוצות שבינן לבין A יש פ' הפיכה.

ועכשיו, נוכל להגדיר את המספרים הממשיים:

$$0 = |\emptyset|$$
$$1 = |\{0\}|$$
$$2 = |\{0,1\}|$$
$$\vdots$$
$$7 = |\{0,1,2,3,4,5,6,7\}|$$

נגדיר את האריתמטיקה בשיעורים הבאים.
לכל קבוצה יש עוצמה.
קנתור הראה שהעוצמה של קבוצת המספרים הטבעיים:

$$|\mathbb{N}| = \aleph_0$$
$$\aleph_0 + 1 = \aleph_0$$
$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$$
$$\aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0$$
$$\aleph_0^m = \aleph_0$$
$$|\mathbb{Z}| = \aleph_0$$
$$|\mathbb{Q}| = \aleph_0$$

נסמן $\aleph = |[0,1]|$, והשאלה היא האם $\aleph = \aleph_0$?

לכן, לכל קטע בישר הממשי (פתוח או סגור, סופי או אינסופי) אותה עוצמה א.

שיעור 10

מתמטיקה בדידה

[Comments]

גיא רוזנדורן, 02/06/2008 17:08

תוכן עניינים

כללים פורמאליים של תחשיב λ 1
פונקציות קורי Curry 2

תקציר משפטים, נוסחאות והדגשים

תהא פונקציה $\boldsymbol{f: A \to B}$, ו $\boldsymbol{f-1}$ היא פונקציה $\boldsymbol{f-1: B \to A}$ אם ורק אם $\boldsymbol{f}$ חח"ע מ A על B.
לכל פונקציה על $f: A \to B$ קיימת $g: B \to A$ כך ש $f \circ g = IB$, כלומר f הפיכה מימין.
לכל $g: B \to A$ חח"ע קיימת $f: A \to B$ כך ש $f \circ g = IB$, כלומר g הפיכה משמאל.
$f: A \to B$ נקראת הפיכה (חח"ע ועל) אם ורק אם יש פונקציה $g: B \to A$ כך ש $g \circ f = IA$, $f \circ g = IB$.
קיימת רק פונקציה g אחת כזו והיא הפונקציה ההופכית $f-1$.
פונקצית קורי $\boldsymbol{Cu}A, B, C$ היא פונקציה מ $A \times B \to C$ ל $A \to (B \to C)$ המתאימה לפונקציה בשני משתנים את הפונקציה הקבלת את המשתנה הראשון ומחזירה פונקציה במשתנה השני.
$Cu = \lambda f: A \times B \to C. \lambda a \in A. \lambda b \in b. fa, b$
$Cu-1 = \lambda g: A \to B \to c. \lambda < a, b > \in A \times B. gab$
לכל שלוש קבוצות C,B,A הראינו קיום פונקציה הפיכה מ $A \times B \to C$ ל $A \to (B \to C)$,
או סימון חלופי: מ $CA \times B$ ל CBA, וזו אחת מפעולות האריתמטיות של החזקות.
היחס בין קבוצות שיש ביניהן פונקציה הפיכה הוא סימטרי, רפלקסיבי, טרנזיטיבי.
כלומר, היחס הזה הוא יחס שקילות.
העוצמה של קבוצה A מסומנת ב |A| והיא מחלקת כל הקבוצות שבינן לבין A יש פ' הפיכה.