שיעור 10

מבוא להסתברות

מאורעות בלתי-תלויים, ניסויי ברנולי, משתנה מקרה, משתנה מקרי בדיד

גיא רוזנדורן, 04/06/2008 14:07

מאורעות בלתי תלויים

שאלה

כיצד מגדירים אי-תלויות ליותר משני מאורעות?

למשל, מתי A,B,C בלתי תלויים?

בוודאי שנדרוש שכזוגות הם מאורעות בלתי תלויים:

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)\,;P(A\cap C)=P(A)P(C)\,;\;P(B\cap C)=P(B)P(C)$$

זה מספיק אם $P(C|A\cap B)=P(C)$, כלומר:

$$\frac{P(C\cap A\cap B)}{P(A\cap B)}=P(C)\Leftrightarrow P(A\cap B\cap C)=P(A\cap B)P(C)\Leftrightarrow P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B)P(C)$$

אי-תלות בזוגות לא מפסיקה, נסתכל על הדוגמה הבאה:

מטילים קובייה סימטרית פעמיים. יש 36 תוצאות, כל תוצאה שוות-הסתברות. מגדירים מאורעות:

מאורע A – בהטלה 1 הייתה תוצאה אי-זוגית

מאורע B – בהטלה 2 הייתה תוצאה אי-זוגית

מאורע C – סכום התוצאות בשתי ההטלות היה אי-זוגי.

C,B,A בלתי תלויים בזוגות.

מכך שההטלות בלתי תלויות אחת בשנייה, ברור ש B,A בלתי תלויים ולא צריך לבדוק בנוסחה.

נבדוק אם A ו-C בלתי תלויים, כלומר נבדוק אם אכן מתקיים:

$$P(A)=\frac{1}{2}\;;\;P(A|C)=\frac{1}{2}\Rightarrow P(A)=P(A|C)$$

באופן דומה B ו-C בלתי תלויים.

נשים לב ש $P(A\cap B\cap C)=P(\emptyset)=0\neq P(A)P(B)P(C)$ כלומר המאורעות אינם בלתי תלויים.

שלוש מאורעות בלתי תלויים

יהיו C,B,A מאורעות במרחב הסתברות. אומרים כי המאורעות בלתי תלויים אם הם בלתי תלויים בזוגות וגם כשלשה. כלומר, $P(A\cap B)=P(A)P(B)$ ***וגם*** $P(A\cap C)=P(A)P(C)$ ***וגם*** $P(B\cap C)=P(B)P(C)$ ***וגם*** $P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B)P(C)$.

אי-תלות של n מאורעות

אומרים כי המאורעות $A_1,\dots,A_n$ ***הם בלתי תלויים אם הם בלתי תלויים בזוגות, בשלשות וכו'.***

כלומר, צריכים להתקיים התנאים הבאים:

לכל $k=2,\dots,n$ ***ולכל בחירה של k אינדקסים*** $1\le i_1.,,,.i_k\le n$:

$$P\left(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\ldots.\cap A_{i_k}\right)=\prod_{j=1}^{k}P\left(A_{i_j}\right)$$

סה"כ מספר התנאים שיופיעו הוא:

$$\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n-\binom{n}{0}-\binom{n}{1}=2^n-n-1$$

שיעור 10

מבוא להסתברות

מאורעות בלתי-תלויים, ניסויי ברנולי, משתנה מקרה, משתנה מקרי בדיד

גיא רוזנדורן, 04/06/2008 14:07

סדרת מאורעות ברנולי

נערכת סדרה של n ניסיונות בלתי תלויים, כך ש:

א. בכל ניסוי בודד מבין n הניסיונות יש 2 תוצאות אפשריות: הצלחה (1) וכישלון (0).

ב. הסיכוי להצלחה בניסוי בודד היא p ‏($0 \leq p \leq 1$), והסיכוי לכישלון הוא 1-p.

תוצאה במרחב המדגם Ω_n היא ווקטור באורך n כאשר x_i מייצג את תוצאת הניסוי ה i, והוא יכול להיות הצלחה או כישלון. במלים אחרות: $\Omega_n = \{(x_1, \dots, x_n) | x_i = 0 \text{ או } x_i = 1\}$.

במרחב המדגם Ω_n יש 2^n תוצאות אפשרויות, כלומר $|\Omega_n| = 2^n$.

נחשב את ההסתברות של התוצאות ב Ω_2: כל התוצאות הן: $\Omega_2 = \{(1,1), (1,0), (0,1), (0,0\}$. אז:

$$P(1,1) = P(B_1 \cap B_2) = P(B_1)P(B_2) = p^2$$

$$P(1,0) = p(1-p)\,; P(0,1) = (1-p)p\,, P(0,0) = (1-p)^2$$

עבור $n = 3$: $P(1,0,1) = p^2(1-p);\ P(1,1,0,0,1) = p^3(1-p)^2$.

ובאופן כללי:

$$P(x_1, \dots, x_n) = P^{\text{המספר ה}-1}(1-p)^{\text{המספר ה}-0}$$

$$\text{המספר ה} - 1 = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\text{המספר ה} - 0 = n - \sum_{i=1}^{n} x_i$$

לסיכום:

$$P\big((x_1, \dots, x_n)\big) = P^{\sum_{i=1}^{n} x_i} p^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

הערה: ההסתברות של תוצאה $(x_1, \dots, x_n)$ תלויה רק במספר ההצלחות אך לא במיקום שלהם.

המאורעות "המעניינים" הם A_k - היו בסדרה של n הניסיונות בדיוק k "הצלחות", $k = 0,1,2 \dots, n$.

$$P(A_k) = P\left(\left\{(x_1, \dots, x_n); \sum_{i=1}^{n} x_i = k\right\}\right)$$

$$(x_1, \dots, x_n) \in A_k \Rightarrow P\big((x_1, \dots, x_n)\big) = p^k(1-p)^{n-k}$$

אבל מספר נקודות המדגם במאורע A_k הוא $\binom{n}{k}$ כמספר האפשרויות לבחור את מיקום k ההצלחות.

לכן, מתקבל:

$$P(A_k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$P(A_0) = (1-p)^n$$

$$P(A_1) = n * p * (1-p)^{n-1}$$

$$\vdots$$

$$P(A_n) = p^n$$

המאורעות $A_0, \dots, An$ הם מאורעות זרים בזוגות, והאיחוד שלהם הוא Ω_n, ולכן:

$$1 = P(\Omega_n) = P(\cup_{k=0}^{n} A_k) = \sum_{k=0}^{n} P(A_k)$$

כלומר:

$$\sum^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 1 \Leftrightarrow [p + (1-p)]^n = 1^n = 1$$

דוגמאות

קליעה למטרה

הסיכוי לפגוע במטרה בירייה בודדת היא 25%. יורים לעבר המטרה שתי יריות בלתי-תלויות.
מה הסיכוי שהמטרה נפגעה?
המאורע "המטרה נפגעה" הוא שקול למאורע "לפחות פגיעה אחת במטרה". המאורע המשלים של המאורע הזה הוא "לא היו פגיעות במטרה", מה שקראנו לו A_0. לכן לפי מאורעות ברנולי[1]:

$$P(\text{המטרה נפגעה}) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{A}_0) = 1 - (1-\mathrm{p})^2 = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{16}$$

באופן כללי, אם נורות n יריות בלתי תלויות במטרה: $P_n = P(\text{המטרה נפגעה}) = 1 - (1-p)^n$.
מכך נסיק ש $P_n < 1$ ו $P_n \to_{n\to\infty} 1$.

תלמיד במבחן

תלמיד ניגש למבחן שיש בו 10 שאלות שהתשובה על כל שאלות הוא "כן" או "לא".
מעבר הבחינה פירושו לפחות 6 תשובות נכונות.
תלמיד ניגש לבחינה מבלי שלמד את החומר (הוא מנחש את התשובות). מה הסיכוי שיצליח בבחינה?

לפנינו סדרה של 10 ניסויי ברנולי (n=10) בלתי תלויים עם סיכוי בניסוי בודד של 0.5 (p=0.5).
נסמן מאורע A - מאורע המעניין, שהוא "מעבר הבחינה" והוא: $\cup_{k=6}^{10} A_k$. אז:

$$P(A) = \sum_{k=6}^{10} P(A_k)$$

$$P(A_k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$n = 10, p = 1 - p = \frac{1}{2}$$

$$P(A_k) = \binom{10}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

$$P(A) = \sum_{k=6}^{10}\binom{10}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\left[\binom{10}{6} + \binom{10}{7} + \cdots + \binom{10}{9} + \binom{10}{10}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}^{10}\,[210 + 12 + 45 + 10 + 1] = \frac{386}{2^{10}} = \frac{386}{1024} \cong 38\%$$

---

[1] אפשר לפתור את הבעיה הזו עם תרשים עץ, אבל זו הדרך הכי פשוטה

שיעור 10

מבוא להסתברות

מאורעות בלתי-תלויים, ניסויי ברנולי, משתנה מקרה, משתנה מקרי בדיד

גיא רוזנדורן, 04/06/2008 14:07

ניסויים והצלחות

בסדרה של n ניסויים עם סיכוי p להצלחה בניסוי בודד, התקבלו k הצלחות.
מה ההסתברות שבניסוי מספר i הייתה הצלחה?
נסמן מאורע B_i שבו הייתה הצלחה בניסוי מספר i, שההסתברות האפריורי שלו היא p.
נסמן מאורע A_k שבו היו k הצלחות. נחשב את ההסתברות המותנה של B_i בתנאי A_k:

$$P(B_i|A_k) = \frac{P(B_i \cap A_K)}{P(A_k)}$$

$$P(A_k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

במאורע החיתוך יש הצלחה בניסוי i, וסה"כ k הצלחות. אז בשלב הראשון נחשב את הסיכוי להצלחה בניסוי ה i, ואח"כ נבחר את k-1 הניסויים מתוך n-1 שבהם הייתה הצלחה, ואז נחשב את הסיכוי להצלחה בניסויים האלה, ואח"כ את הסיכוי לכישלון בשאר הניסויים. אז נקבל:

$$P(B_i \cap A_k) = p\binom{n-1}{k-1} p^{k-1}(1-p)^{n-k} = \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$P(B_i \cap A_k) = \frac{P(B_i \cap A_K)}{P(A_k)} = \frac{\binom{n-1}{k-1}}{\binom{n}{k}} = \frac{\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!}}{\frac{n!}{k!\,(n-k)!}} = \frac{k}{n}$$

משתנים מקריים

דוגמא

מסובבים סביבון שעליו ארבע אותיות: "נ", "ג", "ה", "פ". מתאימים לסביבון פונקצית תשלום:
אם יצא "נ" לא מקבלים ולא משלמים
אם יצא "ג" מקבלים 2 יחידות (+2)
אם יצא "ה" מקבלים 1 יחידה (+1)
אם יצא "פ" משלמים 1 יחידה (-1)
נגדיר את פונקצית "הרווח" שלנו אם הופיעה התוצאה ω: $\omega \in \Omega \Rightarrow X(\omega)$ כך ש $X: \Omega \to \mathbb{R}^1$, ומתאימה לכל נקודת מדגם נקודה על הישר הממשי.

משתנה מקרי חד-מימדי

יהי נתון מרחב הסתברות עם מרחב מדגם Ω. משתנה מקרי X היא פונקציה המתאימה לכל נקודת מדגם ω ב Ω מספר ממשי $X(\omega)$, כלומר $X: \Omega \to \mathbb{R}^1$.

הערות

על אותו מרחב מדגם אפשר להגדיר הרבה משתנים מקריים.
משתנה מקרי הוא בעצם פונקציה. המקריות היא זו שהערכים של המשתנה המקרי בניסוי נתון נקבעים באופן אקראי.

שיעור 10

מבוא להסתברות

מאורעות בלתי-תלויים, ניסויי ברנולי, משתנה מקרה, משתנה מקרי בדיד

גיא רוזנדורן, ‏04/06/2008 14:07

דוגמא

בכד 10 כדורים מהם 5 אדומים ו-5 לבנים. מוציאים מהכד 3 כדורים עם החזרה. נגדיר משתנה מקרי X שהוא מספר הכדורים האדומים שהוצאנו. נסתכל על מרחב המדגם:

$\Omega = \{(R,R,R),(R,R,W),(R,W,R),(R,W,W),(W,R,R),(W,R,W),(W,W,R),(W,W,W)\}$.

אז $\mathrm{X}(\omega)$ = מספר הכדורים האדומים ב ω: $\mathrm{X}(R,R,R)=3, \mathrm{X}(R,W,W)=1$

$$P(\mathrm{X}=0)=P(\{\omega:\mathrm{X}(\omega)=0\})=P\big((W,W,W)\big)=\frac{1}{8}$$

$$P(\mathrm{X}=2)=P(\{\omega,\mathrm{X}(\omega)=2\})=P\big((R,R,W),(R,W,R),(W,R,R)\big)=\frac{3}{8}$$

משתנה מקרי בדיד

יהי X משתנה מקרי המוגדר על מרחב הסתברות. אומרים כי X הוא משתנה מקרי בדיד אם קיימת סדרת ערכים $x_1,\dots,x_n$ ש X מקבל אותם, בהסתברויות $P_{\mathrm{X}}(x_i)$, כלומר, $P_{\mathrm{X}}(x_i)=P(\mathrm{X}=x_i)$.

הפונקציה $P_{\mathrm{X}}(x_i)$ נקראת בשם פונקצית ההסתברות של המשתנה המקרי X, והיא מקיימת: ההסתברות של $P_{\mathrm{X}}(x_i)$ אי שלילית לכל i, $\sum_i P_{\mathrm{X}}(x_i)=1$ ו $x_i\in A$ $P(\mathrm{X}\in A)=\sum P_{\mathrm{X}}(x_i)$.

שיעור 10

מבוא להסתברות

מאורעות בלתי-תלויים, ניסויי ברנולי, משתנה מקרה, משתנה מקרי בדיד

גיא רוזנדורן, 04/06/2008 14:07

תוכן עניינים

שיעור 10

מבוא להסתברות

מאורעות בלתי-תלויים, ניסויי ברנולי, משתנה מקרה, משתנה מקרי בדיד

גיא רוזנדורן, 04/06/2008 14:07

תקציר משפטים, נוסחאות והדגשים

יהיו C,B,A מאורעות במרחב הסתברות. אומרים כי המאורעות בלתי תלויים אם הם בלתי תלויים בזוגות וגם כשלשה. כלומר, $PA\cap B=PAPB$ וגם $PA\cap C=PAPC$ וגם $PB\cap C=PBPC$ וגם $PA\cap B\cap C=PAPBP(C)$.

אומרים כי המאורעות $A1,\ldots,An$ הם בלתי תלויים אם הם בלתי תלויים בזוגות, בשלשות וכו'. כלומר, צריכים להתקיים התנאים הבאים:

לכל $k=2,\ldots,n$ ולכל בחירה של k אינדקסים $1\le i1.,,,.ik\le n$:

$PAi1\cap Ai2\cap\ldots.\cap Aik=j=1kPAij$

סה"כ מספר התנאים שיופיעו הוא:

$n2+n3+\cdots+nn=2n-n0-n1=2n-n-1$

יהי נתון מרחב הסתברות עם מרחב מדגם Ω. משתנה מקרי X היא פונקציה המתאימה לכל נקודת מדגם ω ב Ω מספר ממשי $\mathrm{X}(\omega)$, כלומר $\mathrm{X}:\Omega\to\mathbb{R}1$.

על אותו מרחב מדגם אפשר להגדיר הרבה משתנים מקריים.

משתנה מקרי הוא בעצם פונקציה. המקריות היא זו שהערכים של המשתנה המקרי בניסוי נתון נקבעים באופן אקראי.

יהי X משתנה מקרי המוגדר על מרחב הסתברות. אומרים כי X הוא משתנה מקרי בדיד אם קיימת סדרת ערכים $x1,\ldots,xn$ ש X מקבל אותם, בהסתברויות $P\mathrm{X}(xi)$, כלומר, $P\mathrm{X}xi=P(\mathrm{X}=xi)$.

הפונקציה $P\mathrm{X}(xi)$ נקראת בשם פונקצית ההסתברות של המשתנה המקרי X, והיא מקיימת: ההסתברות של $P\mathrm{X}(xi)$ אי שלילית לכל i, $iP\mathrm{X}xi=1$ ו $P\mathrm{X}\in A=\sum P\mathrm{X}xi\ \ xi\in A$.