

# שיעור 11

מבוא להסתברות

משתנה מקרי בדיד

גיא רוזנדורן, 11/06/2008 14:05

## משתנה מקרי בדיד

יהי  $X$  משתנה מקרי המוגדר על מרחב הסתברות. אומרים כי  $X$  הוא משתנה מקרי בדיד אם קיימת סדרת ערכים  $x_1, \dots, x_n$  של  $X$  מקבל, בהסתברויות  $P_X(x_i)$ , כלומר,  $P_X(x_i) = P(X = x_i)$ . הפונקציה  $P_X(x_i)$  נקראת בשם פונקציית ההסתברות של המשתנה המקרי  $X$ , והיא מקיימת: ההסתברות של  $P_X(x_i)$  אי שלילית לכל  $i$ ,  $\sum_i P_X(x_i) = 1$  ו-  $\sum_{x_i \in A} P_X(x_i) = P(X \in A)$ . שתי התכונות הראשונות הן תכונות אופייניות לפונקציית ההסתברות של משתנה מקרי. כלומר: התכונות (א) ו-(ב) מאפיינות פונקציית ההסתברות של משתנה מקרי בדיד.

משתנה מקרי  $X$  מאופיין ע"י:

ערכי  $X$ :  $x_1, x_2, \dots$

הסתברויות:  $P_X(x_1), P_X(x_2), \dots$

## דוגמה

מסתכלים על הפונקציה  $P(n) = p(1-p)^{n-1}$  שמוגדרת על כל המספרים הטבעיים.  $p$  הוא פרמטר בין 0 ל-1. נבדוק שאכן  $P(n)$  מקיימת את התכונות (א) ו-(ב).  
א.  $P(n) \geq 0$  לכל  $n$ :  $P(n) = p(1-p)^{n-1} > 0$  כי  $0 < p < 1$ .  
ב.  $\sum_{n=1}^{\infty} P(n) = 1$ .

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(n) = \sum_{n=1}^{\infty} p(1-p)^{n-1} = p + p(1-p) + p(1-p)^2 + \dots$$

לפנינו טור גיאומטרי אינסופי יורד עם  $q = 1-p$ ,  $a_1 = p$  כאשר  $0 < q < 1$ . כידוע, הסכום של טור כזה:

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{p}{1-(1-p)} = 1$$

כלומר,  $P(n)$  מקיימת את הדרישות (א) ו-(ב), ולפי הטענה, היא פונקציית ההסתברות של משתנה מקרי בדיד כלשהו. השאלה היא איזה? הסיפור מאחורי פונקציית ההסתברות זו הוא מאוד פשוט:

נערכת סדקה של ניסיונות בלתי תלויים. בכל אחד מהם יש שתי תוצאות אפשריות: "הצלחה" ו-"כישלון", כשהסיכוי ל-"ה" בניסוי בודד הוא  $p$  (והסיכוי ל-"כ" הוא  $1-p$ ). מגדירים משתנה מקרי  $X$  כמספר הניסיונות הדרוש עד ל-"ה" ראשונה.

ערכי  $X$ :  $1, 2, 3, \dots$

ההסתברות:  $p, (1-p)p, (1-p)^2, \dots$

באופן כללי:  $P(X = n) = p(1-p)^{n-1}$

התכונה השלישית אומרת:  $P(X \in A) = \sum_{n \in A} P(X = n)$ . למשל: ההסתברות שנדרשו יותר מ-  $m$  ניסיונות לקבל "הצלחה", או במילים אחרות, ההסתברות שב-  $m$  ניסיונות הראשונים היו "כישלון":

$$P(X > m) = \sum_{n>m} P(n) = \sum_{n=m+1}^{\infty} P(n) = \sum_{n=m+1}^{\infty} p(1-p)^{n-1} = \frac{p(1-p)^m}{1-(1-p)} = (1-p)^m$$

## הערות

**"ההתפלגות" (או "חוק ההתפלגות" או "חוק ההסתברות") של משתנה מקרי בדיד היא:**  
**רשימת הערכים וההסתברויות. (בטבלה).**  
**משתנים מקריים שיש להם אותה התפלגות אינם בהכרח זהים.**

למשל, מטילים מטבע סימטרי 3 פעמים. מרחב המדגם כולל  $2^3 = 8$  תוצאות שונות. נגדיר משתנה מקרי  $X$ : מספר ה-"עצים" ב-3 הטלות. נגדיר משתנה מקרי  $Y$ : מספר ה-"תאריך" ב-3 התאריך. ברור כי  $X, Y$  משתנים מקריים שונים, אבל יש להם אותה התפלגות. ערכי  $X$ : 0,1,2,3 ואלה גם ערכי  $Y$ . וגם:

$$P(X = 3) = P(\gamma, \gamma, \gamma) = \frac{1}{9} = P(\text{ת, ת, ת}) = P(Y = 3)$$

$$P(X = 2) = \frac{\binom{3}{2}}{2^3} = \frac{\binom{3}{1}}{2^3} = P(Y = 2)$$

## התפלגויות מיוחדות

בשיעורים הבאים נדבר על התפלגויות מיוחדות, שמתארות משפחה רחבה של פונקציות משתנים מקריים בדידים, שבעזרתם נפתור בעיות דומות.

## התפלגות בינומית

**אומרים כי למשתנה מקרי  $X$  יש התפלגות בינומית עם פרמטרים  $n, p$  ( $n$  מספר טבעי,  $0 < p < 1$ ) ומסמנים זאת בקיצור בצורה הבאה:**  $X \sim B(n, p)$ . **מקבל את:**  
**הערכים:**  $0, 1, 2, \dots, n$

**ההסתברויות הבאות:**  $P(X = k) = P_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$  **כך ש**  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ .

נבדוק שמתקיימות התכונות (א) ו-(ב):

א. נוודא  $P_X(k) \geq 0$  לכל  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ . זה ברור, כי כל גורם בנוסחה למעלה הוא אי-שלילי.

ב. נוודא  $\sum_{k=0}^n P_X(k) = 1$ :

$$\sum_{k=0}^n P_X(k) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = [p + (1-p)]^n = 1^n = 1$$

**סיפור המעשה שעומד מאחורי ההתפלגות הזו:**

**א. נערכת סדרה של  $n$  ניסויי ברנולי בלתי תלויים.**

**ב. בכל ניסוי יש 2 תוצאות אפשריות: הצלחה וכישלון.**

**ג. הסיכוי להצלחה בניסוי בודד הוא  $p$ , והסיכוי לכישלון הוא  $1-p$ .**

**ד. המשתנה המקרי  $X$ : מספר ההצלחות בסדרה של  $n$  הניסיונות.**

**ערכי  $X$ :**  $0, 1, 2, \dots, n$

**הסתברות:**  $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

<sup>1</sup> גל אומר שהמשתנה מתפלג

<sup>2</sup> נוסחת פיתוח הבינום

## דוגמאות

### מחלה

הסיכוי לחלות במחלה לא מדבקת הוא 0.01.

א. מהי התפלגות מספר החולים במחלה בקבוצה של 100 אנשים?

ב. מהי ההסתברות לבדיק 10 חולים?

הניסיונות בלתי תלויים, יש שתי תוצאות אפשריות לניסוי בודד, הסיכוי לתוצאה אחת בניסוי בודד הוא  $p$ . מתקיימות כל ההנחות של התפלגות בינומית, ולכן אם נסמן ב  $X$  את המספר החולים ב-100 אנשים:

$$X \sim B(n, p)$$

$$X \sim B(100, 0.01)$$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} = \binom{100}{k} (0.01)^k (0.99)^{100-k}$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, 100$$

ההסתברות שיש בדיוק 10 חולים היא:

$$P(X = 10) = \binom{100}{10} (0.01)^{10} (0.99)^{90}$$

אפשר להגדיר משתנה מקרי  $Y$ : מספר האנשים שאינם חולים במחלה:

$$Y \sim B(100, 0.99)$$

## חפש את המטמון

10 אנשים נשלחים להביא מטמון, בתקווה שאחד ימצא אותו.

הסיכוי ללכת איבוד בדרך למטמון הוא  $\frac{1}{5}$ . הסיכוי שהמטמון יימצא, אם מגיעים לאזור שלו, הוא  $\frac{1}{8}$ .

מה הסיכוי שהמטמון יימצא?

ההנחה הראשונית היא שהניסויים הם בלתי תלויים – הרי כל איש לא יספר לאחרים איך הוא מתקדם.

הסיכוי שבנאדם בודד יגיע אל המטמון הוא  $\frac{4}{5} = 1 - \frac{1}{5}$ , והסיכוי שגם ימצאו אותו הוא  $p = \frac{1}{10} = \frac{4}{5} * \frac{1}{8}$ .

נסמן ב  $Z$  את מספר האנשים שמצאו את המטמון, אז  $Z$  מתפלג בינומית:  $Z \sim B(10, \frac{1}{10})$ .

הסיכוי שהמטמון יימצא שווה להסתברות ש  $Z$  גדול או שווה ל-1 (לפחות איש אחד ימצא אותו), שווה ל-1 פחות הסיכוי שהמטמון לא יימצא כלל. כלומר:

$$P(Z \geq 1) = 1 - P(Z = 0) = 1 - \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} = 1 - \binom{10}{0} (0.1)^0 (0.9)^{10} = 1 - (0.9)^{10}$$

## התפלגות גיאומטרית

אומרים כי למשתנה מקרי  $X$  יש התפלגות גיאומטרית עם פרמטר  $0 < p < 1$ .

מסמנים זאת בצורה הבאה:  $X \sim G(p)$ , והוא מקבל את:

הערכים:  $1, 2, 3, \dots$

ההסתברויות:  $P(X = n) = P_X(n) = p(1 - p)^{n-1}$ .

כבר בדקנו ש  $P_X(n) = 0$  לכל  $n$  וכן כי  $\sum_{n=1}^{\infty} P_X(n) = 1$ .

סיפור המעשה של ההתפלגות הגיאומטרית:

א. נערכת סדרה של ניסויי ברנולי בלתי תלויים.

ב. בכל ניסוי שתי תוצאות אפשרויות: הצלחה וכישלון.

ג. הסיכוי להצלחה בניסוי בודד הוא  $p$ , הסיכוי לכישלון הוא  $1 - p$ .

ד. המשתנה המקרי  $X$ : מספר הניסיונות הדרושים עד להצלחה הראשונה.

## דוגמא - צרור מפתחות

לבן יש צרור ובו 10 מפתחות, כאשר רק מפתח אחד פותח את דלת ביתו.

בן מנסה לפתוח את הדלת אך שוכח לסמן מפתח שכבר נוסה.

מהי ההסתברות שנדרשו יותר מ-10 ניסיונות לפתיחת הדלת?

נזהה את מרכיבי ההתפלגות הגיאומטרית:

סדרת ניסויי ברנולי, בכל ניסוי שתי תוצאות (כן נפתחה, לא נפתחה), הניסיונות בלתי תלויים (כי הוא לא

מסמן את המפתחות שכבר נוסו), והסיכוי להצלחה בניסוי בודד הוא  $p = \frac{1}{10}$  (רק מפתח 1 פותח הדלת).

המשתנה המקרי  $X$  הוא מספר הניסיונות עד שהדלת נפתחה:  $X \sim G\left(\frac{1}{10}\right)$ .

שואלים מהי ההסתברות שנדרשו יותר מ-10 ניסיונות לפתיחת הדלת, כלומר  $P(X > 10)$ ?

$$P(X > 10) = \sum_{n=11}^{\infty} p(1 - p)^{n-1} = (1 - p)^{10} = (0.9)^{10}$$

נניח שהאדם מסמן את המפתח שהוא מנסה ומתעניינים ב  $X =$  מספר הניסיונות עד לפתיחת הדלת.

מהי התפלגות  $X$ ? הערכים ש  $X$  יכול לקבל:  $1, 2, 3, \dots, 10$ . ההסתברויות:

$$P(X = 1) = \frac{1}{10}$$

$$P(X = 2) = \frac{9}{10} * \frac{1}{9} = \frac{1}{10}$$

$$P(X = 3) = \frac{9}{10} * \frac{8}{9} * \frac{1}{8} = \frac{1}{10}$$

⋮

$$P(X = k) = \frac{1}{10}; k = 1, 2, \dots, 10$$

זאת התפלגות אחידה.

<sup>3</sup> חישבו זאת בתחילת השיעור

## שיעור 11

מבוא להסתברות

משתנה מקרי בדיד

גיא רוזנדורן, 11/06/2008 14:05

### התפלגות אחידה

**אומרים כי למשתנה מקרי  $X$  יש התפלגות אחידה על המספרים מ- $M$  ועד  $N$ .**

**מסמנים זאת בצורה הבאה:**  $X \sim U(M, N)$ , ו  $X$  מקבל את:

**הערכים:**  $M, M + 1, M + 2, \dots, N$

**הסתברויות שוות:**  $P(X = k) = \frac{1}{N - M + 1}$

### דוגמא - אוטובוס 74

אוטובוס 74 עוזב כל 20 דקות בדיוק החל משעה שלימה את התחנה הראשונה שלו באוניברסיטה. סטודנט מגיע לתחנה זו בזמן מקרי בין 17:00 ל-18:00. מהי ההסתברות שהוא יחכה יותר מ-5 דקות ליציאת האוטובוס מהתחנה? זמן ההמתנה נמדד בדקות שלימות, מעוגלות למטה.

נגדיר משתנה מקרי  $X$ : זמן ההמתנה בדקות שלמות.

הערכים ש  $X$  מקבל: 0, 1, 2, ..., 19.  $X$  מתפלג אחיד בין 0 ל-19, כלומר:  $X \sim U(0, 19)$ ,  $P(X = k) = \frac{1}{20}$ . ההסתברות המבוקשת היא:

$$P(X > 5) = P(X = 6, 7, 8, \dots, 19) = 14 * \frac{1}{20} = 0.7$$

### התפלגות פואסונית

**אומרים כי למשתנה מקרי  $X$  יש התפלגות פואסונית עם פרמטר  $\lambda$  ( $\lambda > 0$ ). ומסמנים זאת:**

**$X \sim P(\lambda)$ .  $X$  מקבל את הערכים: 0, 1, 2, 3, ... ואת ההסתברויות:**  $P_X(n) = P(X = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$

נבדוק שאכן  $P(n)$  מקיימת את התכונות (א) ו-(ב).

א. נוודא ש  $P_X(n) \geq 0$ . זה ברור כי כל הגורמים אי-שליליים.

ב. נוודא ש  $\sum_{n=0}^{\infty} P_X(n) = 1$ :

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_X(n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \left[ 1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \dots \right] = e^{-\lambda} [e^\lambda] = e^{-\lambda + \lambda} = e^0 = 1$$

**"הסיפור" שמאחורי התפלגות פואסונית:**

**א. המשתנה המקרי סופר מספר אירועים לאורך זמן.**

**ב. מספרי האירועים בקטעי זמן זרים הם אירועים בלתי תלויים.**

**ג.  $\lambda$  זה מספר האירועים הממוצע ליחידת הזמן. המספר הממוצע של אירועים בקטע חלקי**

**פרופורציונאלי לאורך הקטע יחסית לקטע הכולל.**

הסיפור של ההתפלגות הפואסונית הוא מורכב, ולא נצטרך לזהות אותו בתרגילים, תמיד יצוין זאת.

<sup>4</sup> זה טור טיילור של הפונקציה  $e^x$  סביב  $\lambda$

## דוגמא

מספר הפונים ללשכת מודיעין מפולג פואסונית עם 200 פונים בממוצע ל-8 שעות. מהי ההסתברות שב-12 הדקות הראשונות יפנה לפחות אדם אחד?  
 ב-8 שעות יש 200 פונים בממוצע, כלומר  $\lambda = 200$  ליחידת זמן של 8 שעות. נסמן ב- $X$  את המשתנה המקרי = מספר הפניות ב-12 הדקות הראשונות. אז:

$$X \sim P\left(\frac{200}{(8 * 6)/12} = \frac{200}{40} = 5\right)$$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \left[\frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}\right] = 1 - e^{-5}$$

$$X_s \sim P(\lambda_s)$$

$$X_t \sim P(\lambda_t)$$

$$X_{s+t} \sim P(\lambda(s+t))$$

$$P(X_{s+t} = n) = \sum_{k=0}^n P(X_s = k)P(X_t = n - k)$$