[הקלד את כותרת המסמך]

אלגברה ליניארית 2

[Comments]

גיא רוזנדורן, 12/06/2008 08:02

הפירוק הרציונאלי

למה

יהי W תת-מרחב אינווריאנטי-T של V, והעתקה $R: V \to \bar{V}$ ליניארית (נכתוב $\bar{V}$ במקום $R(v)$), אז:

א. קיימת העתקה יחידה $\bar{T}: \bar{V} \to \bar{V}$ כך ש $\bar{T}(\bar{V}) = \overline{T(v)}$ לכל $v \in V$.

ב. $\bar{T}$ ליניארית

ג. לכל $f \in F[x]$ ולכל $v \in V$ מתקיים $f(\bar{T})(\bar{v}) = \overline{f(T)(v)}$.

מסקנה

בתנאי הלמה יהי $v \in V$, יהיו $T_v = T|_{Z(v,T)}$, $\bar{T}_{\bar{v}} = \bar{T}|_{Z(\bar{v},\bar{T})}$ ויהיו m_v מאפס-T של v ו $m_{\bar{v}}$ מאפס-$\bar{T}$ של $\bar{v}$

אז: א. $m_{\bar{T}}|m_T$, ב. $m_{\bar{v}}|m_v$

למה

יהי $v_1 \in V$ כך ש $Z(v_1,T)$ בעל מימד מקסימאלי. תהי $R: V \to \bar{V}$ ליניארית על $\bar{V}$ ו $\ker R = Z(v_1,T)$. נכתוב $\bar{v}$ במקום $R(v)$, ותהי $\bar{T}: \bar{V} \to \bar{V}$ ההעתקה שהגדרנו קודם. יהי $w \in \bar{V}$ ויהי m_w מאפס-$\bar{T}$ של w. אז יש $v \in V$ כך ש $\bar{v} = w$, $m_v = m_w$ ו $m_v|m_{v_1}$.

טענה 1

אם $m_v(T)(v) = f(T)(v_1)$ ומתקיים גם $\deg f < \deg m_w$ אז $f = 0$.

טענה 2

אם $m_v(T)(v) = f(T)(v_1)$ מתקיים $m_w|f$ ויש $u \in V$ כך ש $\bar{u} = w$ ו $m_u = m_w$.

משפט הפירוק הרציונאלי

יהי V מרחב וקטורי ממימד סופי מעל שדה F ותהי $T: V \to V$ העתקה ליניארית.

א. קיימים $v_1, \dots, v_r \in V$ שונים מאפס בעלתי מאפסי-T $m_1, \dots, m_r \in F[x]$ בהתאמה, כך ש:

$$V = Z(v_1,T) \oplus \dots \oplus Z(v_r,T)$$

$$m_r|m_{r-1}|\dots|m_2|m_1$$

ב. אם גם $v'_1, \dots, v'_s \in V$ שונים מאפס בעלתי מאפסי-T $m'_1, \dots, m'_s \in F[x]$ בהתאמה, כך ש:

$$V = Z(v'_1,T) \oplus \dots \oplus Z(v'_r,T)$$

$$m'_s|m'_{s-1}|\dots|m'_2|m'_1$$

אז $r = s$ ו $m_i = m'_i$ לכל $1 \le i \le r$.

ג. $m_T = m_1$

[הקלד את כותרת המסמך]

אלגברה ליניארית 2

[Comments]

גיא רוזנדורן, 08:02 12/06/2008

תוכן עניינים

תקציר משפטים, נוסחאות והדגשים

יהי W תת-מרחב אינווריאנטי-T של V, והעתקה $\boldsymbol{R: V \to V}$ ליניארית (נכתוב $\boldsymbol{V}$ במקום $\boldsymbol{Rv}$), אז:

א. קיימת העתקה יחידה $\boldsymbol{T: V \to V}$ כך ש $\boldsymbol{TV = Tv}$ לכל $\boldsymbol{v \in V}$.

ב. $\boldsymbol{T}$ ליניארית

ג. לכל $\boldsymbol{f \in Fx}$ ולכל $\boldsymbol{v \in V}$ מתקיים $\boldsymbol{fTv = fTv}$.

בתנאי הלמה יהי $\boldsymbol{v \in V}$, יהיו $\boldsymbol{Tv = TZ(v, T)}$, $\boldsymbol{Tv = TZv, T}$ ויהיו $\boldsymbol{mv}$ מאפס-$\boldsymbol{T}$ של $\boldsymbol{v}$ ו $\boldsymbol{mv}$ מאפס-$\boldsymbol{T}$ של $\boldsymbol{v}$ אז: א. $\boldsymbol{mT|mT}$, ב. $\boldsymbol{mv|mv}$

יהי $\boldsymbol{v1 \in V}$ כך ש $\boldsymbol{Zv1, T}$ בעל מימד מקסימאלי. תהי $\boldsymbol{R: V \to V}$ ליניארית על $\boldsymbol{V}$ ו $\boldsymbol{kerR = Zv1, T}$. נכתוב $\boldsymbol{v}$ במקום $\boldsymbol{Rv}$, ותהי $\boldsymbol{T: V \to V}$ ההעתקה שהגדרנו קודם. יהי $\boldsymbol{w \in V}$ ויהי $\boldsymbol{mw}$ מאפס-$\boldsymbol{T}$ של $\boldsymbol{w}$. אז יש $\boldsymbol{v \in V}$ כך ש $\boldsymbol{v = w}$, $\boldsymbol{mv = mw}$ ו $\boldsymbol{mv|mv1}$.

יהי $\boldsymbol{V}$ מרחב וקטורי ממימד סופי מעל שדה $\boldsymbol{F}$ ותהי $\boldsymbol{T: V \to V}$ העתקה ליניארית.

א. קיימים $\boldsymbol{v1, \dots, vr \in V}$ שונים מאפס בעלתי מאפסי-$\boldsymbol{T}$ $\boldsymbol{m1, \dots, mr \in Fx}$ בהתאמה, כך ש:

$\boldsymbol{V = Zv1, T \oplus \dots \oplus Zvr, T \; mrmr - 1 \dots m2m1}$

ב. אם גם $\boldsymbol{v1', \dots, vs' \in V}$ שונים מאפס בעלתי מאפסי-$\boldsymbol{T}$ $\boldsymbol{m1', \dots, ms' \in Fx}$ בהתאמה, כך ש:

$\boldsymbol{V = Zv'1, T \oplus \dots \oplus Zv'r, T \; m'sm's - 1 \dots m'2m'1}$

אז $\boldsymbol{r = s}$ ו $\boldsymbol{mi = mi'}$ לכל $\boldsymbol{1 \le i \le r}$.

ג. $\boldsymbol{mT = m1}$