

התפלגות פואסונית

המחשה

נתונים:  $X_s$  מספר האירועים ב  $(0, s)$ ,  $X_t$  מספר האירועים ב  $(0, t)$  ו  $X_{s+t}$  מספר האירועים ב  $(0, t + s)$ . ידוע כי התפלגות האירועים היא פואסונית עם ממוצע של  $\lambda$  אירועים ליחידת זמן באורך 1. המשמעות:

$$X_s \sim P(\lambda * s)$$

$$X_t \sim P(\lambda * t)$$

מאחר והקטעים  $(0, s)$  ו  $(s, s + t)$  זרים אזי מספר האירועים בהם בלתי-תלויים. וגם:

$$X_{s+t} \sim P(\lambda(s + t))$$

מבחינה הסתברותית:

$$P(X_{s+t} = n) = \frac{[\lambda(s + t)]^n}{n!} e^{-\lambda(s+t)}$$

מצד שני, ההסתברות של  $X_{s+t}$  הוא איחוד של הסתברות של מאורעות בלתי תלויים:

$$\begin{aligned} P(X_{s+t} = n) &= \sum_{k=0}^n P(X_s = k, X_t = n - k) = \sum_{k=0}^n P(X_s = k)P(X_t = n - k) = \sum_{k=0}^n \frac{(\lambda s)^k}{k!} e^{-\lambda s} \frac{(\lambda t)^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\lambda t} \\ &= \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} (\lambda s)^k (\lambda t)^{n-k} = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\lambda s)^k (\lambda t)^{n-k} \\ &= \frac{[\lambda(s + t)]^n}{n!} e^{-\lambda(s+t)} \end{aligned}$$

התפלגות היפר-גיאומטרית

אומרים כי למשתנה מקרי  $X$  יש התפלגות היפר-גיאומטרית עם פרמטרים  $W, R, n$  ומסמנים כך:

$$X \sim H(n, R, W)$$

$$P(X = r) = \frac{\binom{R}{r} \binom{W}{n-r}}{\binom{R+W}{n}}$$

$$r = 0, 1, 2, \dots, \min\{R, n\}$$

סיפר המעשה:

ב-"כד" יש  $(R + W)$  "כדורים" מהם  $R$  "אדומים" ו- $W$  "לבנים". מוציאים מהכד ללא החזרה  $n$  כדורים, חלקים "אדומים" וחלקים "לבנים". נתבונן במשתנה המקרי  $X$  - מספר הכדורים "האדומים" שהוצאו.

לכן מתקיימות התכונות של פונקצית הסתברות:

א. נודא ש  $P_X(n) \geq 0$ . זה ברור כי כל הגורמים אי-שליליים.

ב. נודא ש  $\sum_{r=0}^n P_X(X = r) = 1$ . זה נובע מכך ש:

$$\binom{R+W}{n} = \sum_{r=0}^n \binom{R}{r} \binom{W}{n-r}$$

אם היינו מוציאים את הכדורים עם החזרה, היינו מקבלים התפלגות בינומית.

<sup>1</sup> לפי נוסחת הבינום:  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a + b)^n$

**דוגמא**

בכיתה יש 30 תלמידים מהם 20 בנים ו-10 בנות. בוחרים מהכיתה משלחת של 6 תלמידים. מהי ההסתברות שפרופורציה המינים במשלחת היא כמו בכיתה?

נסמן במשתנה מקרי  $X$  את מספר הבנים במשלחת, והוא מתפלג היפר-גיאומטרית:

$$X \sim H(6, 20, 10)$$

$$P(x = r) = \frac{\binom{20}{r} \binom{10}{6-r}}{\binom{30}{6}}$$

$$r = 0, 1, 2, \dots, 6$$

צריכה להישמר פרופורציה של 2:1, כלומר צריכים להיבחר 4 בנים ו-2 בנות. מאורע זה שקול ל  $r = 4$ :

$$P(x = 4) = \frac{\binom{20}{4} \binom{10}{2}}{\binom{30}{6}}$$

**משתנה מקרי דו-מימדי**

**הגדרה**

יהי נתון מרחב הסתברות. משתני מקרי דו-מימדי  $(X, Y)$  הוא פונקציה המעתיקה את מרחב המדגם למישור הממשי. כלומר, לכל נקודת מדגם  $\omega$  במרחב  $\Omega$  המשתנה המקרי הדו-מימדי  $(X, Y)$  מתאים נקודה  $(X(\omega), Y(\omega))$  במישור הממשי:  $(X, Y): \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2, \omega \rightarrow ((X(\omega), Y(\omega)))$ .

**דוגמא**

מטילים מטבע סימטרי פעמיים. נתבונן בזוג משתנים מקריים  $(X, Y)$  המוגדרים כך:  $X$  הוא מספר ה-"עצים" בשתי ההטלות ו- $Y$  הוא ההפרש בין מספר ה-"העצים" למספר ה-"תאריכים".

$$\Omega = \{(ע, ע), (ע, ת), (ת, ע), (ת, ת)\}$$

$$(X, Y) = \{(2, 2), (1, 0), (1, 0), (0, 2)\}$$

$$(X, Y): \Omega \rightarrow \begin{matrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{matrix}$$

נשים לב:

$X$  מקבל את הערכים 0, 1, 2.  $Y$  מקבל את הערכים (-2, 0, 2). נרשום את כל הצירופים האפשריים בטבלה:

X \ Y	-2	0	2
0	1/4	0	0
1	0	1/2	0
2	0	0	1/4

הגדרה

יהיו  $X, Y$  משתנים מקריים המוגדרים על אותו מרחב הסתברות כך ש  $X$  מקבל הערכים  $x_1, x_2, \dots$  ו  $Y$  מקבל את הערכים  $y_1, y_2, \dots$ . פונקצית ההסתברות של המשתנה המקרי הדו-מימדי  $(X, Y)$  מסומנת ב  $P_{X,Y}(x_i, y_j)$ , ומוגדרת כך:

$$P_{X,Y}(x_i, y_j) = P(X = x_i, Y = y_j)$$

לכל  $i$  ולכל  $j$  פונקציה זו מקיימת את התכונות הבאות:

א.  $P_{X,Y}(x_i, y_j) \geq 0$  לכל  $i$  ולכל  $j$ .

ב.  $\sum_{i,j} P_{X,Y}(x_i, y_j) = 1$ .

ג.  $P((X, Y) \in A) = \sum_{(x_i, y_j) \in A} P_{X,Y}(x_i, y_j)$  - באמצעות ציור או הטבלה.

דוגמא

מבצעים ניסוי דו-שלבי. בשלב הראשון מטילים מטבע סימטרי שעל צדדיו רשומים המספרים 0,1. בשלב השני מטילים קובייה סימטרית אם בשלב הראשון הופיע 0, אחרת מטילים שוב את המטבע. מתבוננים בזוג משתנה מקריים  $X$  תוצאת השלב הראשון ו  $Y$  תוצאת השלב השני. נמצא את פונקצית ההסתברות  $P_{X,Y}$  וכן את ההסתברות של הקבוצה  $P(X^2 + Y^2 < 9)$ . נבנה את טבלת הערכים:

$x \backslash y$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12
1	1/4	1/4	0	0	0	0	0

$X: 0,1$  ,  $Y = 0,1,2,3,4,5,6$

$$P(X = 0, Y = 1) = P(X = 0)P(Y = 1|X = 0) = \frac{1}{2} * \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

$$P(X = 1, Y = 1) = P(X = 1)P(Y = 1|X = 1) = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

נחשב את ההסתברות של  $P(X^2 + Y^2 < 9)$ , בשתי דרכים: ויזואלית: נצייר במישור את המעגל  $X^2 + Y^2 = 9$ , נבדוק אילו מהנקודות שלהן הסתברות חיובית נמצאות בתוך המעגל, ונסכם את ההסתברויות של נקודות אלו.

באמצעות הטבלה: נסכם את ההסתברויות של התאים בטבלה שעבורם  $X^2 + Y^2 < 9$ . אז:

$$P(X^2 + Y^2 < 9) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

בעזרת הטבלה אפשר לחשב ביתר קלות הסתברויות נוספות:

$$P(X = 0) = \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$P(X = 1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(Y = 1) = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1+3}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

אפשר להרחיב את הטבלה ולקבל זאת:

$x \backslash y$	0	1	2	3	4	5	6	$P_x$
0	0	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	1/2
1	1/4	1/4	0	0	0	0	0	1/2
$P_Y$	1/4	1/3	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	1

**הסתברויות שוליות**

יהא  $(X, Y)$  משתנה מקרי דו-מימדי המקבל ערכים  $(x_i, y_j)$  עם פונקציית הסתברות דו-מימדית  $P_{X,Y}(x_i, y_j)$ . פונקציית ההסתברות השולית של  $X$  מסומנת ב  $P_X$  ומוגדרת לכל ערך  $x_i$  באופן הבא:

$$P_X(x_i) = P(X = x_i) = \sum_j P_{X,Y}(x_i, y_j)$$

באופן דומה פונקציית ההסתברות השולית של  $Y$  מסומנת ב  $P_Y$  ומוגדרת כך:

$$P_Y(y_j) = P(Y = y_j) = \sum_i P_{X,Y}(x_i, y_j)$$

$P_X$  ו  $P_Y$  הן פונקציות ההסתברות של המשתנים המקריים  $X, Y$  החד מימדים בהתאמה והן מקיימות את תכונות פונקציות ההסתברות:

א.  $P_X(x_i) \geq 0$  ו  $P_Y(y_j) \geq 0$  לכל  $i$  ו  $j$

ב.  $\sum_i P_X(x_i) = 1$  ו  $\sum_j P_Y(y_j) = 1$ .

**דוגמה**

מטילים שתי קוביות סימטריות. משתנה מקרי  $X$  הוא תוצאת ההטלה הראשונה, ומשתנה מקרי  $Y$  הוא הערך המוחלט של הפרש התוצאות בין ההטלות.  $X$  מקבל את הערכים  $0, 1, 2, \dots, 6$  ו  $Y$  מקבל את הערכים  $0, \dots, 5$ . נמצא את  $P_X, P_Y, P_{X,Y}$ . נבנה את טבלת הערכים המשותפת:

$x \setminus y$	0	1	2	3	4	5	$P_X$
1	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1
2	1/36	2/36	1/36	1/36	1/36	0	1
3	1/36	2/36	2/36	1/36	0	0	1
4	1/36	2/36	2/36	1/36	0	0	1
5	1/36	2/36	1/36	1/36	1/36	0	1
6	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1
$P_Y$	6/36	10/36	8/36	6/36	4/36	2/36	1

בהינתן פונקציית ההסתברות המשותפת  $P_{X,Y}$  נקבעות ההסתברויות השוליות  $P_X, P_Y$ .

**שאלה**

באילו תנאים, בהינתן ההסתברויות השוליות  $P_X, P_Y$  נקבעת  $P_{X,Y}$ ? כאשר המשתנים המקריים בלתי-תלויים

## משתנים מקרים בלתי-תלויים

### הגדרה

יהיו  $X, Y$  משתנים מקריים בלתי-תלויים בעלי התפלגות משותפת  $P_{X,Y}(x_i, y_j)$ . אומרים כי  $X$  ו- $Y$  בלתי תלויים אם לכל  $i, j$  מתקיים  $P_{X,Y} = P_X(x_i)P_Y(y_j)$

### דוגמא

$X \setminus Y$	$y_1$	$y_2$	$P_X$
$x_1$	$pq$	$p(1 - q)$	
$x_2$	$(1 - p)q$	$(p - 1)(q - 1)$	$p$
$P_Y$	$q$	$q - 1$	1

### בדיקת אי-תלות של משתנים מקריים

כדי לבדוק ש- $X$  ו- $Y$  בלתי תלויים, יש לבדוק כי  $P_{X,Y}(x_i, y_j) = P_X(x_i)P_Y(y_j)$  בכל תא  $(i, j)$  בטבלה. כדי לראות שמשתנים מקריים הם תלויים, מספיק להיווכח בכך בתא בודד בטבלה, למשל 0.