# שיעור 14

מבוא להסתברות

[Comments]

גיא רוזנדורן, 18/06/2008 14:15

## משתנים מקרים בלתי-תלויים

### תרגיל לסיכום

מפזרים 3 כדורים שונים ל-3 תאים. מגדירים שני משתנים מקריים:

N – מספר התאים התפוסים, X – מספר הכדורים בתא מס' 1.

נמצא את ההתפלגות השולית של $X$ ו- Y, ואת ההתפלגות המשותפת שלהם: $P_N$, $P_X$, $P_{X,N}$

$P_X$ הוא בעצם פונקצית ההסתברות של X. ברור ש $X$ מתפלג בינומית: $X{\sim}B(3,\frac{1}{3})$, וערכי $X$ עם 0,1,2,3. אז:

$$P(X=k)=\binom{3}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{3-k}$$

$$P(X=3)=\frac{1}{27}$$

$$P(X=0)=\frac{8}{27}$$

$$P(X=1)=\frac{12}{17}$$

$$P(X=2)=\frac{6}{27}$$

עכשיו נבנה את הטבלה:

| $x \backslash y$ | 1 | 2 | 3 | $P_x$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $\frac{2}{27}$ | $\frac{6}{27}$ | 0 | $\frac{8}{27}$ |
| 1 | 0 | $\frac{6}{27}$ | $\frac{6}{27}$ | $\frac{12}{27}$ |
| 2 | 0 | $\frac{6}{27}$ | 0 | $\frac{6}{27}$ |
| 3 | $\frac{1}{27}$ | 0 | 0 | $\frac{1}{27}$ |
| $P_N$ | $\frac{3}{27}$ | $\frac{18}{27}$ | $\frac{6}{27}$ | 1 |

### הממוצע

### הממוצע המשוכלל

בכיתה יש 25 תלמידים ובבחינה מסוימת 15 קבלו 80 ו-10 קיבלנו 70. הציון הממוצע בכתה הוא:

$$\frac{15*80+10*70}{25}=76$$

חישוב הממוצע המשוכלל מתבצע כך:

יהיו $x_1,x_2,\dots,x_k$ ערכים, המופיעים $n_1,n_2,\dots,n_k$ בהתאמה. אז הממוצע המשוכלל הוא:

$$\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i}=\sum_{i=1}^{k} x_i\left(\frac{n_i}{n}\right)$$

$$n=\sum_{i=1}^{k} n_i$$

נסמן ב $f_i$ את השכיחות היחסית של הופעת $x_i$ אז: $f_i=\frac{n_i}{n}$ הממוצע של $\sum_{i=1}^{k} x_i f_i$ , $f_i\geq 0$ ו $\sum_{i=1}^{k} f_i=1$

## תוחלת של משתנה מקרי

***יהא נתון משתנה מקרי בדיד $X$ המקבל את הערכים $x_1, x_2, \dots, x_n$ בהסתברויות $P_X(X_1), P_X(X_2), \dots$.***
***התוחלת של $X$ מסומנת ב $E(X)$ ומוגדרת כך, ובלבד שהטור מופיע ב $E(X)$ מתכנס בהחלט:***

$$E(X) = \sum_i x_i P_X(x_i)$$

## הערות

***התוחלת של משתנה מקרי נקבעת ע"י ההתפלגות שלו.***

***כאשר ב- $E(X)$ מופיע טור אינסופי אנו דורשים שהטור יתכנס בהחלט, כלומר, שיש לו סכום סופי, ושהסכום אינו תלוי בסדר הסכימה.***

***יש משתנים מקריים שאין להם תוחלת סופית.***

למשל: יהי משתנה מקרי $X$ המקבל את הערכים $X: 1,2,3, \dots$ ופונקציית ההסתברות: $P(X=n) = \frac{c}{n^2}$. אז:

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} P(X=n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c}{n^2} = c\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \Rightarrow c = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right)^{-1}$$

$$\mathrm{E(X)} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\infty} \mathrm{n\,P(X=n)} = \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \mathrm{n}\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{n}^2} = \mathrm{c}\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{n}} = +\infty$$

הטור הזה מתבדר ולכן למשתנה המקרי הזה אין תוחלת סופית.

## דוגמאות לחישוב תוחלת

***1. $X$ מתפלג אחיד על המספרים מ-1 ועד n: $X \sim U(1,n)$. אז $P(x=k) = \frac{1}{n}$. אז:***

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} k * P(X=l) = \sum_{k=1}^{n} k\frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$$

***2. $X$ מתפלג בינומית עם הפרמטרים $X \sim B(n,p)$. עורכים סדרה של n ניסיונות, הסיכוי להצלחה בניסוי בודד הוא $p$. כמה הצלחות בממוצע יהיו? אז:***

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} k * P(X=k) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$k\binom{n}{k} = k\frac{n!}{k!\,(n-k!)} = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} = n\left[\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!}\right] = n\binom{n-1}{k-1}$$

$$E(X) = np\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1}(1-p)^{n-k} = n * p * \big(p + (1-p)\big)^{n-1} = n * p$$

***3. $X$ מתפלג גיאומטרית עם הפרמטר $X \sim G(p)$ ופ' ההסתברות היא: $P(X=n) = p(1-0)^{n-1}$. אז:***

$$E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} n\,P(X=n) = \sum_{n=1}^{\infty} n\,p(1-p)^{n-1} = p\left[\sum_{n=1}^{\infty} n(1-p)^{n-1}\right]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(1-p)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n(x)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (x^n)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \left(\frac{1}{(1-x)^2}\right) = \frac{1}{\big(1-(1-p)\big)^2} = \frac{1}{p^2}$$

$$E(X) = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$$

***4. $X$ מתפלג פואסונית עם פרמטר: $X\sim P(\lambda)$ ופונקצית ההסתברות $P(X=n)=\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$. אז:***

$$E(x)=\sum_{n=1}^{\infty} nP(X=n)=\sum_{n=0}^{\infty} n\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}=\lambda e^{-\lambda}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda}\right]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda}=1+\frac{\lambda^1}{1}+\frac{\lambda^2}{2!}+\frac{\lambda^3}{3!}+\cdots=e^{\lambda}$$

$$E(X)=\lambda e^{-\lambda}e^{\lambda}=\lambda$$

לא נדבר כרגע על תוחלת של התפלגות היפר-גיאומטרית.

## תוחלת של פונקציה של משתנה מקרי

### שאלה

***נתון משתנה מקרי בדיד $X$ המקבל את הערכים $x_1,x_2,\dots$ בהסתברויות $P_X(x_1),P_X(x_2),\dots$,***
***ונתון משתנה מקרי $Y$ כך ש $Y=g(X)$. איך נחשב את $E(Y)$?***

למשל:

משתנה מקרי $X$ מקבל את הערך $-1$ בהסתברות $\frac{1}{4}$, את הערך $0$ בהסתברות $\frac{1}{2}$, ואת $1$ בהסתברות $\frac{1}{4}$.
נתון גם משתנה מקרי $Y=X^2$. מהי $E(Y)$?
אז $Y$ מקבל את הערכים "1" ו-"אפס", בהסתברויות "חצי" –ו"חצי" בהתאמה. אז:

חישבנו קודם את ההתפלגות של המשתנה המקרי Y. יש דרך אחרת, קצרה יותר:

$$\boldsymbol{E(Y)=E\big(g(X)\big)=\sum_i g(x_i)P_X(x_i)}$$

בדוגמה שלנו:

$$E(Y)=E(X^2)=(-1)^2*\frac{1}{4}+(0)^2*\frac{1}{2}+(1)^2*\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

הוכחה:

$$E(Y)=\sum_{y_j} y_jP(Y=y_j)$$

$$P(Y=y)=P(g(X)=y)=\sum_{g(x_i)=y}P_X(x_i)$$

$$E(Y)=\sum_{y_j} y_j\sum_{g(x_i)=y}P_X(x_i)=\sum_j\sum_{g(x_i)=y_j}g(x_i)P(x_i)=\sum_i g(x_i)P_X(x_i)$$

### דוגמא

$X\sim B(n,p)$. נחשב את: $E(x^2)$:

$$E(x^2)=\sum_{k=0}^{n}k^2P(X=k)=\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}k^p(1-p)^{n-k}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}k(k-1)\binom{n}{k}k^p(1-p)^{n-k}+\overbrace{\sum_{k=0}^{n}k(k-1)\binom{n}{k}k^p(1-p)^{n-k})}^{F(x)=n*p}=n^2p^2+np(1-p)$$

# שיעור 14

מבוא להסתברות

[Comments]

גיא רוזנדורך, 18/06/2008 14:15

## הכללה

יהיו $X,Y$ משתנים מקריים בדידים המקבלים ערכים $(x_i,y_j)$ עם פ' הסתברות משותפת $P_{X,Y}(X_i,y_j)$. יהא $Z=h(X,Y)$. אזי: $E(Z)=\sum_{i,j}h(x_i,y_j)P_{X,Y}(x_i,y_j)$.

## דוגמא

| $x \backslash y$ | 1 | 2 | 3 | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{1}{18}$ | $\frac{5}{18}$ | 0 | |
| 2 | $\frac{4}{18}$ | $\frac{3}{18}$ | $\frac{1}{18}$ | |
| 3 | $\frac{2}{18}$ | $\frac{1}{18}$ | $\frac{1}{18}$ | |
| | | | | |

$$Z=\max(X,Y)$$

$$\max(1,1)=1\,;\max(1,2)=2\,;\max(1,3)=3$$

$$\max(2,1)=2\,;\max(2,2)=2\,;\max(2,3)=3$$

$$\max(3,1)=3\,;\max(3,2)=3\,;\max(3,3)=3$$

$$E(Z)=1*\frac{1}{18}+2*\frac{5}{18}+3*0+2*\frac{4}{18}+2*\frac{3}{18}+3*\frac{1}{18}+3*\frac{2}{18}+3*\frac{1}{18}+3*\frac{1}{18}=$$

$$Z=\max(X,Y)=\begin{Bmatrix}1 & \frac{1}{18}\\ 2 & \frac{12}{18}\\ 3 & \frac{5}{18}\end{Bmatrix}$$