שיעור 16

מבוא להסתברות
שונות
גיא רוזנדורן, 25/06/2008 14:12

שונות של משתנה מקרי

פיזור ערכים סביב ממוצע

משתנה מקרי X שמקבל ערכים $x_1, x_2, \ldots$ עם הסתברויות $P_X(x_1), P_X(x_2), \ldots$.
חושבה התוחלת $E(x) = \mu$. אנחנו מתעניינים בסטיות מהממוצע.
ממוצע הסטיות מן הממוצע μ הוא, לפי תכונות התוחלת:

$$\sum_i (x_i - \mu) P_x(x_i) = E[X - \mu] = E(x) - \mu = 0$$

כדי להתגבר על זה, נתבונן מהסטיות מהממוצע בלי אפקט הסימן ע"י העלאה בריבוע.
ממוצע ריבוי הסטיות מהממוצע הוא:

הגדרה

יהא X משתנה מקרי בעל תוחלת סופית μ.
השונות של X מסומנת ב $V(X)$ ומוגדרת כך: $V(X) = E[(x-\mu)^2]$
במקביל מגדירים את סטיית התקן של X שמסומנת ב $\sigma(X)$ באופן הבא: $\sigma(x) = \sqrt{V(x)}$

דוגמא

יהי X משתנה מקרי שמקבל את הערכים $-1,0,1$ והסתברויות $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$ בהתאמה. אז:

$$\mu = E(X) = (-1) * \frac{1}{4} + 0 * \frac{1}{4} + 1 * \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$V(X) = E[(X-\mu)^2] = \left(-1 - \frac{1}{4}\right)^2 \frac{1}{4} + \left(0 - \frac{1}{4}\right)^2 \frac{1}{4} + \left(1 - \frac{1}{4}\right)^2 \frac{1}{2} = -\left(\frac{5}{4}\right)^2 \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 \frac{1}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \frac{1}{2}$$
$$= \frac{25 + 1 + 18}{64} = \frac{44}{64} = \frac{11}{16}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{11}{16}} = \frac{\sqrt{11}}{4}$$

שיטה אלטרנטיבית לחישוב השונות

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

בדוגמא שלנו:

$$\mu = E(X) = \frac{1}{4}$$

$$E(X^2) = (-1)^2 \frac{1}{4} + 0^2 \frac{1}{4} + (1)^2 \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{3}{4} - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{16} = \frac{12-1}{16} = \frac{11}{16}$$

שיעור 16

מבוא להסתברות

שונות

גיא רוזנדורן, 25/06/2008 14:12

הוכחת הנוסחא

$$V(X)=E[(X-\mu)^2]=E[X^2-2\mu X+\mu^2]$$

לפי תכונות התוחלת:

$$V(X)=E(X^2)-2\mu E(X)+u^2=E(X^2)-2\mu^2+\mu^2=E(X^2)-\mu^2=E(X^2)-[E(X)]^2$$

שונות התפלגויות מיוחדות

התפלגות בינומית B(n,p)

עבור $n=1$ (ניסוי בודד), המשתנה המקרי X מקבל ערכים 0,1 בהתפלגויות $p,1-p$ בהתאמה.

נחשב את התוחלת:

$$\mu=E(X)=p$$
$$E(X^2)=E(X)=p$$
$$V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=p-p^2=p(1-p)$$
$$0\le V(X)\le\frac{1}{4}$$

מסקנה:

השונות של משתנה מקרי X המתפלג בינומית היא $X\sim B(1,p)\Rightarrow V(X)=p(1-p)$ עבור $n=1$.

באופן כללי, השונות של משתנה מקרי X המתפלג בינומית היא $X\sim B(n,p)\Rightarrow V(X)=n*p(1-p$

$$V(X)=E(X^2)=[E(X)]^2$$
$$E(X)=n*p$$
$$E(X^2)=\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

חישבו את הביטוי הזה באחד השיעורים הקודמים, וקיבלנו:

$$E(X^2)=n*p(1-p)+n^2p^2$$
$$V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$
$$V(X)=n*p(1-p)+n^2p^2-(np)^2=n*p(1-p)$$
$$0\le V(X)\le\frac{n}{4}$$

התפלגות פואסונית P(?)

$$X\sim P(\lambda)\Rightarrow E(X)=\lambda$$

כדי לחשב את השונות של משתנה מקרי X, נחשב את $E(X^2)$:

$$E(X^2)=\sum_{n=0}^{\infty}n^2P(X=n)=\sum_{n=0}^{\infty}n^2\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}+\sum_{n=0}^{\infty}n\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}=\lambda^2e^{-\lambda}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\lambda^{n-2}}{(n-2)!}+\lambda$$
$$=\lambda^2e^{-\lambda}e^{\lambda}+\lambda=\lambda^2+\lambda$$

לכן:

$$V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\lambda^2+\lambda-(\lambda)^2=\lambda$$

השונות של משתנה מקרי X המתפלג פואסונית היא $X\sim P(\lambda)\Rightarrow V(X)=\lambda$.

שיעור 16

מבוא להסתברות
שונות
גיא רוזנדורן, 25/06/2008 14:12

הערה

יש משתנים מקריים שיש להם תוחלת סופית אבל השונות שלהם לא קיימת (כשמחשבים את השונות מקבלים טור שאינו מתכנס).

למשל, עבור משתנה מקרי X המקבל את הערכים ...1,2,3 בהסתברויות $P(X=n)=\frac{c}{n^3}$ כאשר:

$$C=\frac{1}{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}}$$

$$E(X)=\sum_{n=1}^{\infty}nP(X=n)=\sum_{n=1}^{\infty}n\frac{c}{n^3}=c\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

התוחלת הסופית, לעומת זאת:

$$E(X^2)=\sum_{n=0}^{\infty}n^2P(X=n)=c\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}$$

$E(X^2)$ לא סופית ולכן אין שונות.

תכונות השונות

$V(X)\geq 0$ ***לכל משתנה מקרי X שיש לו שונות.***

$V(X)=0$ ***אם ורק אם X הוא משתנה מקרי קבוע. כלומר, קיים c כך ש*** $P(X=c)=1$, $V(X)=$ $\sum_i(x_i-\mu)^2P_X(x_i)$. ***סכום זה הוא 0 כאשר כל המחוברים הם אפס: כל ההסתברויות הן חיוביות ומכך נובע שלכל i מתקיים*** $x_i=\mu$***, כלומר כל הערכים שווים לממוצע.***

$V(aX+b)=a^2V(X)$ ***כלומר הזזה של הנקודות לא משנה את השונות, הכפלה כן***

שונות של סכום משתנים מקריים היא $V(X+Y)=V(X)+V(Y)+2E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]$:

יהא X משתנה מקרי עם תוחלת μ_X ומשתנה מקרי Y עם תוחלת μ_Y. נגדיר משתנה מקרי $X+Y$ עם תוחלת $\mu_X+\mu_Y$. השונות של $V(X+Y)$ היא:

$$V(X+Y)=[E(X+Y-\mu_X-\mu_Y)^2]=E[(x-\mu_X)+(Y-\mu_Y)]^2$$
$$=E[(x-\mu_X)^2+(Y-\mu_Y)^2+2(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]$$

לפי תכונות התוחלת:

$$V(X+Y)=E[(X-\mu_X)^2]+E(Y-\mu_Y)^2]+2E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]$$

כלומר:

$$V(X+Y)=V(X)+V(Y)+2E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]$$

שונות משותפת

יהיו X,Y משתנים מקריים, השונות המשותפת שלהם מסומנת ב $Cov(X,Y)$ ***ומוגדרת כך:***

$$\boldsymbol{cov(X,Y)=E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]}$$

קיימת נוסחא אלטרנטיבית לחישוב השונות המשותפת:

$$\boldsymbol{cov(X,Y)=E(X*y)-E(X)E(Y)}$$

לכן

$$\boldsymbol{V(X+Y)=V(X)+V(Y)+2\,cov(X,Y)}$$

שיעור 16

מבוא להסתברות

שונות

גיא רוזנדורן, 25/06/2008 14:12

שאלה

מתי השונות המשותפת של שני משתנים מקריים היא $\text{cov}(X,Y)=0$?

טענה

***אם** X,Y **משתנים מקריים בלתי תלויים אזי** $\text{cov}(X,Y)=0$. **ההפך לא נכון – ייתכן כי** X,Y **תלויים אבל** $\text{cov}(X,Y)=0$.*

למשל:

יהא משתנה מקרי X המקבל את הערכים -1,0,1 בהסתברויות $\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{4}$.

יהא משתנה מקרי Y המוגדר ע"י $Y=X^2$. ברור כי X,Y משתנים תלויים.

$$\text{cov}(X,Y)=E(X*Y)-E(X)E(Y)$$

$$E(X)=-1*\frac{1}{4}+9+1*\frac{1}{4}=0$$

$$E(X*Y)=E(X*X^2)=E(X^3)=E(X)=0$$

הוכחה:

$$E(X*Y)=\sum_{i,j}x_i,y_jP_{x,y}(x_i,y_i)=\sum_{i,j}x_iy_jP_X(x_i)P_Y(y_j)=\left[\sum_i x_iP_X(x_i)\sum_j y_jP_Y(y_j)\right]=E(X)E(Y)$$

לכן:

$$\text{cov}(X,Y)=E(X*Y)-E(X)E(Y)=0$$

משתנים מקריים בלתי מתואמים

***משתנים מקרים** X,Y **נקראים בלתי מתואמים אם** $\text{cov}(X,Y)=0$**, כלומר:** $E(X*Y)=E(X)E(Y)$.*

תכונות השונות המשותפת

***סימטריות:** $\text{cov}(X,Y)=\text{cov}(Y,X)$*

***הכללת השונות:** $\text{cov}(X,X)=V(X)$*

***בילינאריות:** $\text{cov}(X_1+X_2,Y)=\text{cov}(X_1,Y)+\text{cov}(X_2,Y)$ **וגם** $\text{cov}(X,Y_1+Y_2)=\text{cov}(X,Y_1)+\text{cov}(X,Y_2)$*

***תלות ביחידות:** $\text{cov}(aX+b,cY+d)=a*c*\text{cov}(X,Y)$*

חישוב שונות של סכום משתנים מקריים

$$V=\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)=\text{cov}\left(\sum_{i=1}^n X_i,\sum_{j=1}^n X_j\right)=\sum_{i=1}^n\text{cov}\left(X_i,\sum_{j=1}^n X_j\right)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\text{cov}(X_i,X_j)$$

$$=\sum_{i=1}^n\text{cov}(X_i,X_i)+\sum_{i\neq j}^n\text{cov}(X_i,X_j)=\sum_{i=1}^n V(X_i)+\sum_{i\neq j}^n\text{cov}(X_i,X_j)$$

זאת הכללה של הנוסחא לסכום שני משתנים מקריים: $V(X_1+X_2)=V(X_1)+V(X_2)+2\,\text{cov}(X_1,X_2)$

שימושים

שונות של התפלגות בינומית B~(n,p)

$$X\sim B(n,p) \Rightarrow X=\sum_{i=1}^{n} X_i$$

כאשר X_i מקבל שני ערכים: 1 עבור הצלחה בניסוי, 0 אחרת, והם בלתי-תלויים. אז:

$$V(X)=V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)=\sum_{i=1}^{n} p(1-p)=n*p(1-p)$$

בעיית המזכירה הרשלנית

יהא X מספר המכתבים שהגיעו ליעדם. אז: $X=\sum_{i=1}^{n} X_i$ כאשר X_1 שווה 1 אם מכתב i הגיע ליעדו, 0 ושווה ל-0 אחרת. כל אחד מה X_i הוא משתנה בינומי $X_i\sim B(1,\frac{1}{n})$. לכן:

$$E(X_i)=\frac{1}{n}$$

$$V(X_i)=\frac{1}{n}*\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

המשתנים X_i הינם תלויים, לכן צריך לחשב את השונות המשותפת:

$$\operatorname{cov}(X_i,X_j)=E(X_i,X_j)-E(X_i)E(X_j)=\frac{1}{n(n-1)}-\frac{1}{n}*\frac{1}{n}$$

$$V(X)=V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)=\sum_{i=1}^{n} V(X_i)+\sum_{i\neq j}\operatorname{cov}(X_i,X_j)$$

$$V(X)=n*\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)+n(n-1)\left[\frac{1}{n(n-1)}-\frac{1}{n^2}\right]=1-\frac{1}{n}+1-\frac{n-1}{n}=1-\frac{1}{n}+1-1+\frac{1}{n}=1$$