תרגול 04

אלגברה ליניארית 2

[Comments]

גיא רוזנדורן, 04/06/2008 07:58

מציאת נוסחאות נסיגה עם מטריצה וערכים עצמיים

סדרת פיבונצ'י

סדרת פיבונצ'י היא הסדרה $a_0 = 0, a_1 = 1, a_i = a_{i-1} + a_{i-2}$.

מצא נוסחה לאיבר הכללי בסדרת פיבונצ'י (לא נוסחה רקורסיבית, אלא ביטוי שתלוי רק ב n).

$$f_0 = 0\,;\, f_1 = 1$$
$$\forall i > 1 : f \coloneqq f_{i-1} + f_{i-2}$$
$$f_{i+1} = 1 * f_{i-1} + 1 * f_i$$
$$f_i = 0 * f_{i-1} + 1 * f_i$$

נסמן את הווקטור $v_n = \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix}$, ואפשר להציגו כמכפלה של מטריצה בווקטור: $\begin{pmatrix} f_{i+1} \\ f_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_i \\ f_{i-1} \end{pmatrix}$.

נסמן: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. אז:

השאלה היא איך נעלה בחזקה גבוהה את המטריצה הזו.

נמצא את הערכים העצמיים. הפולינום האופייני של המטריצה A:

$$f_A(x) = \begin{vmatrix} x-1 & -1 \\ -1 & x \end{vmatrix} = x^2 - x - 1$$
$$\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

נסמן $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, אז השורשים הם $\varphi, 1-\varphi$.

נחלק עם שארית את הפולינום x^n ב $f_A(x)$. השארית תהיה קטנה מ $f_A(x)$, כלומר:

$x^n = q(x)f_A(x) + a_n x + b_n$. נציב בפנים את השורשים שיאפסו את $f_A(x)$:

נחלץ ממערכת המשוואות:

$$\varphi^n - (1-\varphi)^n = a_n(2\varphi - 1) \Rightarrow a_n = \frac{\varphi^n - (1-\varphi)^n}{2\varphi - 1}$$

נציב במשוואה האחרונה את המטריצה A, שלפי משפט קיילי-המילטון מאפסת את $f_A(x)$:

$$A^n = q(A)f_A(A) + a_n A + b_n I = a_n A + b_n I = \begin{pmatrix} a_n + b_n & a_n \\ a_n & b_n \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n + b_n & a_n \\ a_n & b_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n + b_n \\ a_n \end{pmatrix}$$
$$f_n = \frac{\varphi^n - (1-\varphi)^n}{2\varphi - 1} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{2\varphi - 1}$$

תרגיל

נגדיר ברקורסיה נוסחה:

$$f_0 = 1, f_1 = 3, \dots, f_{n+1} = 2f_n - f_{n-1}$$

מצא ביטוי לאיבר הכללי. נסמן:

נפתח כמו בתרגיל הקודם:

$$f_A(x) = \begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ -1 & x \end{vmatrix} = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$

נחלק עם שארית: $x^n = g(x)f_n(x) + a_n x + b_n$, ונראה למצוא את a_n, b_n.
אם נציב את השורש היחיד של הפולינום האופייני, נקבל: $1^n = 1 = q(1)f_a(1) + a_n + b_n = a_n + b_n$.
יש לנו רק משוואה אחת, ואין לנו עוד שורשים. מה נעשה? טריק – נגזור את המשוואה!
אם נגזור את f_A, אז $x = 1$ כי הפולינום הוא עם שורש יחיד בריבוע.

$$nx^{n-1} = q(x)f_A'(x) + q'(x)f_A(x) + a_n = 2q(x)(x-1) + q'(x)(x-1)^2 + a_n$$

נציב את השורש היחיד שיש בנגזרת: $nx^0 = n = 0 + 0 + a_n \Rightarrow n = a_n$. עכשיו יש לנו 2 משוואות:

$$n = a_n$$
$$1 = a_n + b_n \Rightarrow n + b_n \Rightarrow b_n = 1 - n$$

נשתמש במשפט קיילי-המילטון כמו בתרגיל הקודם:

$$A_n = q(A)f_A(A) + a_n A + b_n I = n\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-n & 0 \\ 0 & 1-n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+n & -n \\ n & 1-n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix} = v_n = \begin{pmatrix} 1+n & -n \\ n & 1-n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2n+3 \\ 2n+1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow f_n = 2n + 1$$

לכסון מטריצות/העתקות

הגדרות

יהי $\dim V = n$ והעתקה ליניארית $T: V \to V$ ו $A \in M_n(F)$
T העתקה לכסינה אם קיים בסיס $\{v_1, \dots, v_n\}$ של וקטורים עצמיים.
A מטריצה לכסינה אם קיימת מטריצה הפיכה P כך ש $P^{-1}AP$ אלכסונית.

תזכורת:
אם $T: F^n \to F^{nn}$ ו-A המטריצה המייצגת את T לפי הבסיס הסטנדרטי, אז T לכסינה אמ"מ A לכסינה. אם $\{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס של וקטורים עצמיים, ו-$P(v_1 \quad \cdots \quad v_n)$ אזי $P^{-1}AP$ אלכסונית.

תזכורת:
אם A מטריצה, ו-$f_A(x)$ הפולינום האופייני שלה, והוא מתפרק לגורמים:
$$f_A = (x-\lambda_1)^{e_1}(x-\lambda_2)^{e_2} * \dots * (x-\lambda_k)^{e_k}$$
אזי e_i הוא הריבוי האלגברי של λ_i, והריבוי הגיאומטרי $\dim V_{\lambda_i}$.
הריבוי האלגברי $\leq$ הריבוי הגיאומטרי ≤ 1.

A לכסינה אמ"מ הפולינום האופייני מתפרק למכפלה של גורמים ליניאריים,
ולכל ערך עצמי λ - הריבוי הגיאומטרי שווה לריבוי האלגברי.

תרגיל

בדוק האם המטריצה לכסינה?

(1)
ראינו בשיעור הקודם שהערך העצמי הוא 1,-1,
כלומר הפולינום האופייני הוא $f_A(x) = (x-1)(x+1)$.
ערך עצמי 1: ריבוי אלגברי 1.
ערך עצמי -1: ריבוי אלגברה 1.
לכל ערך עצמי של המטריצה – הריבוי הגיאומטרי שווה לאלגברי,
ולכן A מטריצה לכסינה.

---

(2)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$
מחשבים פולינומים אופייני, ומתקבל: $f_A(x) = (x-1)(x+1)(x-8)$.
ערך עצמי 1: ריבוי אלגברי 1 ולכן גם הריבוי הגיאומטרי 1.
ערך עצמי -1: ריבוי אלגברי 1 ולכן גם הריבוי הגיאומטרי 1.
ערך עצמי 8: ריבוי אלגברי 1 ולכן גם הריבוי הגיאומטרי 1.
לכל ערך עצמי של המטריצה – הריבוי הגיאומטרי שווה לאלגבברי,
ולכן A מטריצה לכסינה.

באופן כללי, אם הפולינום האופייני מתפרק למכפלה של גורמים ליניאריים <u>שונים</u> אז המטריצה לכסינה.

מחשבים פולינום אופייני ומתקבל: $f_A(x) = (x-5)(x+2)^2$.
ערך עצמי 5: ריבוי אלגברי 1, ולכן ריבוי גיבוי גיאומטרי 1.
ערך עצמי -2: ריבוי אלגברי 2, אז הריבוי הגיאומטרי הוא 2 או 1. צריך להחליט מהו בדיוק.

(3)

$$\dim V_{-2} = ?$$
$$V_{-2} = \{v | Av = -2v\} = \{v | (A+2I)v - 0\}$$

כלומר, V_{-2} הוא מרחב הפתרונות של המערכת הבאה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן:

$$V_{-2} = \{(-5s-t, s, t) | t, s \in \mathbb{R}\} = \mathrm{sp}\{(-5,1,0), (-1,0,1)\}$$

ולכן $\dim V_{-2} = 2$ ולכן הריבוי הגיאומטרי שווה לריבוי האלגברי.
ולכן המטריצה לכסינה.

אלגוריתם לבדיקת לכסינות

1. מחשבים פולינום אופייני. בודקים אם הוא מתפרק לגורמים ליניאריים. אם לא, (למשל $x^2+x+1 \in \mathbb{R}[x]$ אי פריק), אז היא לא לכסינה.
2. אם הוא מתפרק: אז לכל ערך עצמי נחשב את המרחב העצמי (ע"י דירוג), ונבדוק האם המימד שלו (הריבוי הגיאומטרי) שווה לריבוי האלגברי.

תרגיל

(4)

מחשבים פולינום אופייני:

$$f_A(x) = \begin{vmatrix} x-4 & 5 & -7 \\ -1 & x+4 & -4 \\ 4 & 0 & x-5 \end{vmatrix} \underbrace{=}_{R_3} 4(-20+7x+28) + (x-5)(x^2-16+5)$$
$$= 28x + 32 + x^3 - 11x - 5x^2 + 55 = x^3 - 5x^2 + 17x + 87$$

אלעד עשה על הלוח איפשהו טעות, אז נניח שהפולינום האופייני הוא:

$$f_A(x) = x^3 - 5x^2 + 17x - 13$$

אנחנו לא יודעים איך לפרק את הפולינום הזה, אז ננסה לנחש שורשים שלמים. אנחנו יודעים ששורש שלם מחלק את a_0, כלומר את -13. לכן, השורשים האפשריים הם $\pm1, \pm13$.
בודקים ויוצא ש-1 הוא שורש, כלומר $x-1$ מחלק את $f_A(x)$.

המשך בעמוד הבא...

נחלק את הפולינום האופייני ב $x-1$ כדי לרדת לגורם ריבועי, שעבורו נוכל למצוא שורשים בקלות.

$$\begin{array}{l} x^2-4x+13 \\ \hline x^3-5x^2+17x-13|(x-1) \\ x^3-x^2 \\ \quad 4x^2+17x-13 \\ \;-4x^2+4x \\ \qquad\quad 13x-13 \\ \qquad\quad 13x-13 \\ \qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

אז קיבלנו: $f_A(x^2-4x+13)(x-1)$. נחשב שורשים של $x^2-4x+13$:

$$\frac{4\pm\sqrt{16-52}}{2}=\frac{4\pm i\sqrt{6}}{2}=2\pm i3$$

לכן $f_A(x)$ לא מתפרק לגורמים ליניאריים מעל $\mathbb{R}$ ולכן מעל $\mathbb{R}$ המטריצה אינה לכסינה.

מעל $\mathbb{C}$, הפולינום האופייני: $f_A(x)=\big(x-(2+3i)\big)\big(x-(2-3i)\big)(x-1)$.

כאן הפולינום האופייני מתפרק לשלושה גורמים ממעלה 1, ולכן המטריצה הפיכה מעל $\mathbb{C}$.

נמצא את הבסיס העצמי: צריך למצוא 3 וקטורים עצמיים בלתי תלויים ליניארית מעל $\mathbb{C}$, כי יש 3 ערכים עצמיים, כ"א עם מרחב עצמי ממימד 1. לכל ערך עצמי ניקח וקטור עצמי אחד, וזה ייתן לנו את הבסיס.

v_1 - מרחב הפתרונות של $(A*I)v=0$. אלעד הכין ומצא ש $v_1=\mathrm{sp}\{(1,2,1)\}$.

כלומר, $(1,2,1)$ הוא וקטור עצמי השייך לערך עצמי 1.

באופן דומה, $\mathrm{v}_{2+3i}=\mathrm{sp}\{(3-3i,5-3i,4)\}$ ולכן $(3-3i,5-3i,4)$ הוא וקטור עצמי של ערך עצמי 2+3i.

לפי תרגיל בית, הצמוד של ערך עצמי מרוכב הוא גם ערך עצמי,

ולכן $(3+3i,5+3i,4)$ הוא וקטור עצמי של 2-3i.

ולכן בסיס הוא $\{v_1,v_2,v_3\}$. ומתקבלת המטריצה P:

$$P=\begin{pmatrix}1 & 3-3i & 3+3i\\ 2 & 5-3i & 5+3i\\ 1 & 4 & 4\end{pmatrix}$$

תזכורת: אם $x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ כאשר $a_i\in\mathbb{Z}$ ו-b שורש שלם, אז $b|a_0$.

תרגול 04

אלגברה ליניארית 2

[Comments]

גיא רוזנדורן, 04/06/2008 07:58

תוכן עניינים

תרגול 04
אלגברה ליניארית 2
[Comments]
גיא רוזנדורן, 04/06/2008 07:58

תקציר משפטים, נוסחאות והדגשים

יהי $dimV=n$ והעתקה ליניארית $T:V\to V$ ו $A\in Mn(F)$
T העתקה לכסינה אם קיים בסיס $v1,\ldots,vn$ של וקטורים עצמיים.
A מטריצה לכסינה אם קיימת מטריצה הפיכה P כך ש $P-1AP$ אלכסונית.
תזכורת:
אם $T:Fn\to Fnn$ ו-A המטריצה המייצגת את T לפי הבסיס הסטנדרטי, אז T לכסינה אמ"מ A לכסינה.
אם $v1,\ldots,vn$ בסיס של וקטורים עצמיים, ו- $Pv1\ldots vn$ אזי $P-1AP$ אלכסונית.
תזכורת:
אם A מטריצה, ו- fAx הפולינום האופייני שלה, והוא מתפרק לגורמים:
$fA=x-\lambda1e1x-\lambda2e2*\ldots*x-\lambda kek$
אזי ei הוא הריבוי האלגברי של λi, והריבוי הגיאומטרי $dimV\lambda i$.
הריבוי האלגברי ≤ הריבוי הגיאומטרי ≤ 1.
A לכסינה אמ"מ הפולינום האופייני מתפרק למכפלה של גורמים ליניאריים,
ולכל ערך עצמי λ - הריבוי הגיאומטרי שווה לריבוי האלגברי.