

תרגיל

בדוק האם המטריצה הבאה לכסינה מעל \mathbb{R} ומעל \mathbb{C} .

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

נמצא תחילה את הפולינום האופייני:

$$\begin{vmatrix} x-2 & 1 & -2 \\ -5 & x+3 & -3 \\ 1 & 0 & x+2 \end{vmatrix} = -3 + 2(x+3) + (x+2)((x-2)(x+3)+5) = 2x+3 + (x+2)(x^2+x-1) \\ = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x+1)^3$$

לכן יש ערך עצמי יחיד, והוא -1 והריבוי האלגברי שלו הוא 3 .
 הריבוי הגיאומטרי הוא המימד של מרחב הפתרונות של $A + I$. נדרג:

(A +

אנחנו לא צריכים לדעת מהו מרחב הפתרונות, אלא רק מהו המימד שלו.
 אז לא נמצא את מרחב הפתרונות, אלא נקצר.
 תזכורת: אם $B \in M_n(F)$ אזי המימד של מרחב הפתרונות של $Bx = 0$ הוא n פחות המימד של המטריצה המדורגת, כלומר n פחות מספר השורות השונות מאפס במטריצה המדורגת.
 אז בדוגמא הזו, מימד מרחב הפתרונות הוא $1 = 3 - 2$ לכן הריבוי הגיאומטרי הוא $1 \neq 3$.
 לכן המטריצה אינה לכסינה.

תרגיל מבחינה

מצא את כל ערכי $a \in \mathbb{R}$ עבורם המטריצה הבאה לכסינה מעל \mathbb{R} :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a^2 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

נחשב תחילה פולינום אופייני:

$$\begin{vmatrix} x-2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -a^2 \\ -1 & -4 & x \end{vmatrix} = (x-2) \begin{vmatrix} x & -a^2 \\ -4 & x \end{vmatrix} = (x-2)(x^2 - 4a^2) = (x-2)(x-2a)(x+2a)$$

אם $a \neq 0, 1, -1$ הפולינום האופייני מתפרק למכפלה של גורמים ליניאריים שונים ממעלה 1 , ולכן הריבוי הגיאומטרי של כל אחד הוא 1 , ולכן המטריצה לכסינה. נבדוק מה קורה עבור $a = 0, 1, -1$:
 $a = 0$: הפולינום האופייני הוא $(x-2)x^2$. שני ערכים עצמיים: לערך עצמי 2 ריבוי אלגברי וגיאומטרי 1 . לערך העצמי 0 ריבוי אלגברי 2 . נדרג את המטריצה $A - 0I$ על מנת לחשב את הריבוי הגיאומטרי:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן הריבוי הגיאומטרי הוא $2 \neq 1 = 3 - 2$ ולכן המטריצה לא לכסינה עבור $a = 0$.
 $a = \pm 1$: הפולינום האופייני הוא: $(x-2)^2(x+2)$. שני ערכים עצמיים: לערך עצמי -2 ריבוי אלגברי וגיאומטרי 1 . לערך עצמי 2 ריבוי גיאומטרי. נדרג את המטריצה $A - 2I$ על מנת לחשב את הריבוי הגיאומטרי:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (A - 2I)x = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

הדרגה היא 2 , ולכן הריבוי הגיאומטרי הוא $1 = 3 - 2$ ולכן A לא לכסינה עבור $a = \pm 1$.

תרגיל ממבחן

תהי $A \in M_3(\mathbb{R})$. נתון ש $rk(A - I) < rk(A - 2I) < rk(A - 3I)$. הוכח ש A לכסינה ותאר את כל המטריצות האלכסוניות שדומות ל- A .

נשיב לב שהמטריצה A היא מסדר 3, ונסיק מהנתון את המסקנה הבאה:
 אם $rk(A - I) = 0$ אז $A = I \Rightarrow rank(A) = 3$ אם זה המקרה:
 $rank(A - 2I) = rank(-I) = 3$, $rank(A - 3I) = rank(-2I) = 3$, וזה בסתירה לנתונים.
 לכן, $rank(A - I) > 0$. אז: $rank(A - I) = 1 < rank(A - 2I) = 2 < rank(A - 3I) = 3$.
 באופן כללי, λ ערך עצמי אם ורק אם הדרגה של המטריצה $A - \lambda I$ היא קטנה מ n .
 לכן, במקרה שלנו הערכים העצמיים הם 1, 2.
 הסקנו ש $rank(A - I) = 1$ ולכן הריבוי הגיאומטרי של ערך עצמי 1 הוא $3 - 1 = 2$.
 הסקנו ש $rank(A - 2I) = 2$ ולכן הריבוי הגיאומטרי של ערך עצמי 2 הוא $3 - 2 = 1$.
 נסמן ב e_1, e_2 את הריבויים האלגבריים של ערכים עצמיים 1, 2 בהתאמה:
 הפולינום האופייני מתחלק ב: $(x - 1)^{e_1}(x - 2)^{e_2}$. המעלה של הפולינום האופייני היא סכום הריבויים האלגבריים, שמצד אחד קטנה או שווה למעלה של סדר המטריצה (3), ומצד שני גדולה או שווה לסכום הריבויים הגיאומטריים. אז: $2 + 1 \leq e_1 + e_2 \leq 3$. מכך נסיק:

$$e_1 + e_2 = 3 \qquad 2 \leq e_1 \leq 3 \qquad 1 \leq e_2 \leq 3$$

לכן $e_1 = 2, e_2 = 1$. לכן, הפולינום האופייני הוא $(x - 1)^2(x - 2)$. לכן, 1 ו-2 הם כל הערכים העצמיים, והריבוי הגיאומטרי של כ"א שווה לאלגברי, ולכן המטריצה לכסינה.

תזכורת: הצורה האלכסונית (כשהיא קיימת) היא יחידה עד כדי סדר האיברים על האלכסונים הראשי, וכל ערך עצמי מופיע על האלכסון לפי הריבוי שלו. לכן, במקרה שלנו:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

תרגיל

נסמן $V = R_n[x]$. העתקה $T: V \rightarrow V$ נתונה ע"י $T(p(x)) = p'(x)$. בדוק האם T לכסינה.

זאת שאלה שקולה למטריצות. נציג את ההעתקה T לפי בסיס כלשהו, ונפתור לפי המטריצה המייצגת. נסתכל על הבסיס הסטנדרטי: $1, x, x^2, \dots, x^n$. נכתוב את המטריצה המייצגת:

$$\begin{aligned} T(1) &= 0 \\ T(x) &= 1 = 1 * 1 \\ T(x^2) &= 2x = 0 * 1 + 2 * x \\ &\vdots \\ T(x^n) &= nx^{n-1} = 0 * 1 + 0 * 2 + \dots + n * x^{n-1} + 0 * x^n \end{aligned}$$

המטריצה המייצגת היא:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 3 & 0 & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & 0 & n-1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ומכאן ממשיכים כרגיל.

תזכורת: כל שאלה על העתקות אפשר לתרגם למטריצות. רמז לגבי השאלה: רק נשים לב שהדטרמיננטה היא 0, כלומר הפולינום האופייני הוא x^n .

תרגול 05

אלגברה ליניארית 2

[Comments]

גיא רוזנדורן, 06/06/2008 08:23

תרגיל

תהי $A \in M_3(\mathbb{R})$ עם ערך עצמי יחיד λ . הוכח ש A לכסינה אם ורק אם A אלכסונית.

כיוון \Rightarrow : ברור.

כיוון \Leftarrow : נניח ש A לכסינה. אז הפולינום האופייני הוא $(x - \lambda)^3$, והריבוי הגיאומטרי של λ = לאלגברי = 3. כלומר, $\dim V_\lambda = 3$, ולכן $3 - \text{rank}(A - \lambda I) = 3$. לכן $\text{rank}(A - \lambda I) = 0$. לכן $A = \lambda I$ אלכסונית.

תרגיל

לפתור בבית. רמז: לכסון.

כלומר, למצוא את הפולינום האופייני, לפרק אותו לגורמים עצמיים, ולחשב את הגורמים בנפרד.

תרגול 05

אלגברה ליניארית 2

[Comments]

גיא רוזנדורן, 06/06/2008 08:23

תוכן עניינים

No table of contents entries found.

תקציר משפטים, נוסחאות והדגשים

No table of contents entries found.