תרגול 05

מתמטיקה בדידה

[Comments]

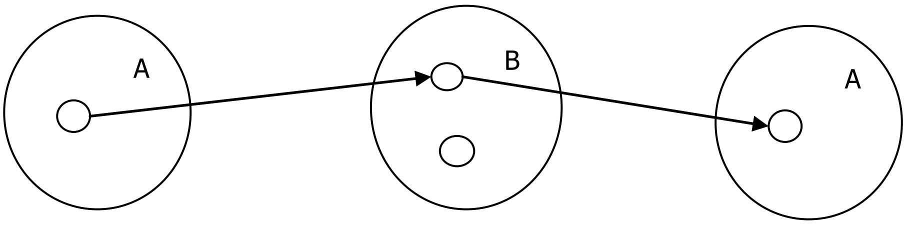
גיא רוזנדורן, 12/06/2008 16:13

פונקציות

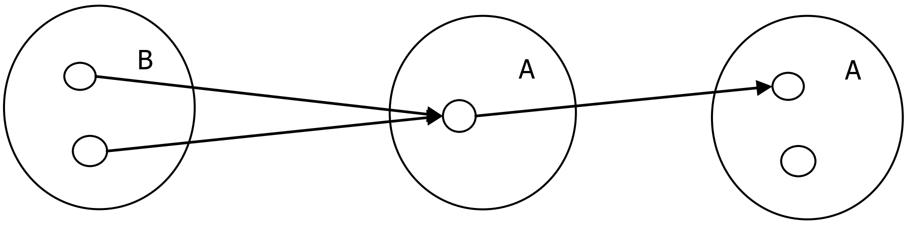
תרגיל

יהי A, B קבוצות כלשהן, $f: A \to B$ ו $g: B \to A$. נתון כי הפונקציה $g \circ f$ הפיכה.
האם נובע כי $f \circ g$ הפיכה?

לא! נראה דוגמה נגדית:



ברור ש $g \circ f = I_A$ ולכן הפיכה. נסתכל על $f \circ g$:



ברור ש $f \circ g(a) = f \circ g(b) = a$, לא חח"ע ולכן לא הפיכה.

נניח f לא על, לכן לא קיימת לה פונקציה הופכית מימין. אבל אם $f \circ g: B \to B$ הפיכה, כלומר קיימת פונקציה $h: B \to B$ כך ש $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h = i_B$ וזו סתירה לכך ש f לא על.

תרגיל

יהי A, B, C קבוצות, ופונקציות $\varphi: A \to B$ ו $F: C^B \to C^A$ כך ש $F(f) = f \circ \varphi$. בכתיב למבדה:

$$\varphi = \lambda a \in A. f(a) \in B$$

$$F = \lambda f \in C^B. \left(\lambda a \in A. \left(\lambda b \in B. f(b)\right)\left(\varphi(a)\right)\right)$$

א. הוכח אם f על אז F חח"ע.

יהי $f, g: B \to C$ ונניח כי $F(f) = F(g)$. צריך להוכיח ש $f = g$. מההנחה $F(f) = F(g)$ נובע ש $f \circ \varphi = g \circ \varphi$ (פשוט מציבים מההגדרה). ידוע ש φ היא על, ולפי התרגיל הקודם קיימת פונקציה $\xi: B \to A$ הופכית מימין כך ש $\varphi \circ \xi = i_B$. לכן:

$$f \circ \varphi = g \circ \varphi \Rightarrow f \circ (\varphi \circ \xi) = g \circ (\varphi \circ \xi) \Rightarrow f \circ i_B = g \circ i_B \Rightarrow f = g$$

ב. הוכח כי אם φ חח"ע אז F על.

יהי $h = A \to C$, צריך להוכיח כי קיימת $F: \mathrm{B} \to \mathrm{C}$ כך ש $\mathrm{F}(f) = h$. φ הפיכה משמאל לכן קיימת פונקציה $\tau: B \to A$ כך ש $\tau \circ \varphi: i_A$. אז:

$$h \circ (\tau \circ \varphi) = h \circ i_A = h$$

נרכיב את f כך ש $f = h \circ \tau$ כך ש : $F(f) = f \circ \varphi = h$.

מ.ש.ל.

תרגול 05

מתמטיקה בדידה

[Comments]

גיא רוזנדורן, 12/06/2008 16:13

תרגיל

יהי A,B,C קבוצות, ופונקציות $\varphi: A \to B$ ו $F: C^B \to C^A$ כך ש $F(f) = f \circ \varphi$. בכתיב למבדה:

$$\varphi = \lambda a \in A. f(a) \in B$$

$$F = \lambda f \in C^B. \left(\lambda a \in A. \left(\lambda b \in B. f(b)\right)(\varphi(a))\right)$$

א. בהנחה שבקבוצה C יש יותר מאיבר אחד, אם f חח"ע אז φ על:

נניח בשלילה כי φ אינה על, כלומר, קיים איבר $b \in B$ כך ש $\forall a \in A. \varphi(a) \neq b$.

נגיע לסתירה ע"י זה שנראה שבמקרה F אינה חח"ע.

יהיו $f, g: B \to C$ המוגדרות באופן הבא:

$$\forall x \in B \quad g(x) = c$$

$$f(x) = \begin{Bmatrix} c_1 & x \neq b \\ c_2 & x = b \end{Bmatrix}$$

נוכיח כי במקרה זה

$$\forall a \in A. F(f)(a) = F(g)(a)$$

$$(f \circ \varphi)(a) = f\big(\varphi(a)\big) = f(b') = c_1 = g(b') = g\big(\varphi(a)\big) = F(g)(a)$$

ב. הוכח שאם F על אז φ חח"ע:

נניח בשלילה ש φ אינה חח"ע, כלומר קיימים $a_1, a_2 \in A$ שונים כך ש $\varphi(a_1) = \varphi(a_2)$.

נגיע לסתירה ע"י זה שנראה במקרה הזה f אינה יכולה להיות על:

תהי $f: A \to C$ פונקציה המקיימת $f(a_1) = a \neq f(a_2) = c_2$ (קיימת פונקציה כזו כי ב C יותר מאיבר אחד).

יהי $g: B \to C$ פונקציה כלשהי. אז $F(g)(a) = g \circ \varphi(a_1) = g \circ \varphi\,(a_2) = F(g)(a_2)$ ולכן $F(g) \neq f$ כי $f(a_1) \neq f(a_2)$.

פונקציה אופיינית של קבוצה

נניח שאנו עובדים על עולם מסוים של איברים U.

תהי $A \subseteq U$ (A קבוצה כלשהי בעולם הדיון שלנו). קיימת פונקציה $\chi_A: U \to \{0,1\}$:

$$\chi_A(u) = \begin{Bmatrix} 1 & u \in A \\ 0 & u \notin A \end{Bmatrix}$$

נוכיח כי $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A\chi_B$ לכל $A, B \subseteq U$. צריך להוכיח כי:

$$\forall u \in U. \chi_{A\cup B}(u) = \chi_A(u) + \chi_B(u) - \chi_A(u)\chi_B(u)$$

נניח כי $u \in A \cup B$. כמה אפשרויות:

- $u \in A \wedge u \notin B$. כך $\chi_B(u) = 0$, $\chi_A(u) = 1$, נציב ונקבל כי $\chi_{A\cup B}(u) = 1$.
- $u \in B \wedge u \notin A$. כך $\chi_B(u) = 1$, $\chi_A(u) = 0$, ונציב ונקבל כי $\chi_{A\cup B}(u) = 1$.
- $u \in B \wedge u \in A$. כך $\chi_A(u) = \chi_B(u) = 1$. נציב ונקבל כי $\chi_{A\cup B} = 1$.

נניח כי $u \notin A \cup B$, כלומר $\chi_B(u) = 0$, $\chi_A(u) = 0$. נציב ונקבל כי $\chi_{A\cup B}(u) = 0$.

כנ"ל, ניתן לראות כי:

$$\chi_{A\cap B} = \chi_A\chi_B$$

$$\chi_{A\setminus B} = x_A - \chi_A\chi_B = X_A(1 - \chi_B)$$

הוכיחו בצורה אלגברית כי:

$$\chi_{A\triangle B} = \chi_A + \chi_B - 2\chi_A\chi_B$$

הוכחה:

$$A \triangle B = (A \cup B)\setminus(A \cap B) \Rightarrow \chi_{A\triangle B} = \chi_{A\cup B}(1 - \chi_{A\cap B} = (\chi_A + \chi_B - \chi_A\chi_B)(1 - \chi_A\chi_B)$$

$$= \chi_A + \chi_B - \chi_A\chi_B - \chi_A^2\chi_B - \chi_A\chi_B^2 + \chi_A^2 + \chi_B^2 = \chi_A + \chi_B - 2\chi_A\chi_B$$

הריבוע של פונקציה בוליאנית הוא הפונקציה המקורית כי $1^2 = 1$, $0^2 = 0$.

הוכיחו כי:

$$A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$$

נוכיח כי הפונקציה אופיינית על שתי הקבוצות הנ"ל שווה:

$$\chi_{A\triangle(B\triangle C)} = \chi_A + \chi_{B\triangle C} - 2\chi_A\chi_{B\triangle C} = \chi_A + \chi_B + \chi_C - 2\chi_B\chi_C - 2\chi_A(\chi_B + \chi_c - 2\chi_B\chi_C)$$
$$= (\chi_A + \chi_B - 2\chi_A\chi_B) + \chi_C - 2\chi_C(\chi_A + \chi_B - 2\chi_A\chi_B) = \chi_{A\triangle B} + \chi_C - 2\chi_{A\triangle B}\chi_C = \chi_{(A\triangle B)\triangle C}$$

עוצמות

יהי A, B קבוצות. נסמן $A\sim B$ אם ורק אם קיימת פונקציה $f: A \to B$ חח"ע ועל (שקילות).

* במובן של עוצמות אינטואיטיבית זה כי ב-A וב-B אותו מספר איברים.

תרגיל

הוכיחו כי $\mathbb{N}\sim\mathbb{N}\times\{0,1\}$

$$f: \mathbb{N}\times\{0,1\} \to \mathbb{N}$$
$$f(n,b) = 2n - b$$

נוכיח כי f חח"ע:

נניח $f(n_1,b_1) = f(n_2,b_2)$ ולכן $2n_1 - b_1 = 2n_2 - b_2$ כלומר $b_2 - b_1 = 2(n_2 - n_1)$.

$b_2 - b_1 \in \{-1,0,1\}$ מכיוון שהוא שווה ל $2(n_1 - n_2)$. נסיק כי $b_2 - b_1 = 0$ כלומר $b_1 = b_2$.

במקרה זה $2(n_1 - n_2) = 0$ ולכן $n_1 - n_2 = 0$, כלומר $n_1 = n_2$.

קיבלנו כי $(n_1,b_1) = (n_2,b_2)$.

נוכיח כי f על:

יהי $k \in \mathbb{N}$. צריך להוכיח כי קיימים $n \in \mathbb{N}$ ו $b \in \{0,1\}$ כך ש $f((n,b)) = 2n - b = k$.

אם k זוגי נבחר b=0 כך ש $n = \frac{k}{2}$ ו $2n - b = 2\left(\frac{k}{2}\right) - 0 = k$

אם k אי-זוגי נבחר $b = 1$, $n = \frac{k+1}{2}$ ו $2\left(\frac{k+1}{2} - 1\right) = (k+1) - 1 = k$

$$f^{-1}: \mathbb{N} \to \mathbb{N}\times\{0,1\}$$

$$f^{-1} = \begin{Bmatrix} \left(\frac{k}{2}, 0\right) & \text{זוגי } k \text{ זו} \\ \left(\frac{k+1}{2}, 1\right) & \text{אי}-\text{זוגי } k \end{Bmatrix}$$

תרגיל

הוכיחו כי: $\{0,1\}^{\mathbb{N}}\sim\{0,1\}^{\mathbb{N}_{even}}\times\{0,1\}^{\mathbb{N}_{odd}}$ $F: \{0,1\}^{\mathbb{N}_{even}}\times\{0,1\}^{\mathbb{N}_{odd}}$.

יהי $g: \mathbb{N}_{odd} \to \{0,1\}$, $f: \mathbb{N}_{odd} \to \{0,1\}$. אז: $F(<f,g>)(n) = \begin{Bmatrix} f(n) & n \in \mathbb{N}_{even} \\ g(n) & n \in \mathbb{N}_{odd} \end{Bmatrix}$

נוכיח כי F חח"ע: נניח $f_1, f_2: \mathbb{N}_{even} \to \{0,1\}$ ו $g_1, g_2: \mathbb{N}_{odd} \to \{0,1\}$ כך ש $F(<f_1,g_1>) = F(<f_2,g_2>)$.

צריך להוכיח כי $<f_1,g_1>=<f_2,g_2>$, או במלים אחרות: $g_1 = g_2 \wedge f_1 = f_2$.

יהי $n \in \mathbb{N}_{even}$. אז $f_1(n) = F(<f_1,g_1>)(n) = F(<f_2,g_2>)(n) = f_2(n)$ לכן $f_1 = f_2$.

באותו אופן מוכיחים כי $g_1 = g_2$.

נוכיח כי F על: תהי $h: \mathbb{N} \to \{0,1\}$ כך ש $g = h|_{\mathbb{N}_{odd}}$, $f = h|_{\mathbb{N}_{even}}$.

יהי $n \in \mathbb{N}$ אז $F(<h|_{\mathbb{N}_{even}}, h|_{\mathbb{N}_{odd}}>)(n) = t(n)$. אם n זוגי אז $t(n) = h|_{\mathbb{N}_{even}}(n) = h(n)$ ואם n אי-זוגי $t(n) = h|_{\mathbb{N}_{odd}}(n) = h(n)$ כלומר $t = h$

צמצום של פונקציה: תהי $\varphi: A \to B$ $A' \subseteq A$. נגדיר פונקציה חדשה $\varphi|_{A'}: A' \to B$ כך ש $\varphi|_{A'} = f(a)$ $a \in A'$

תרגול 05

מתמטיקה בדידה

[Comments]

גיא רוזנדורן, 12/06/2008 16:13

תרגיל

הוכיחו כי $(0,1)\sim[0,1]$.

$$f:[0,1]\to(0,1)$$

$$f(x)=\left\{\begin{matrix} \frac{1}{2} & x=0 \\ \frac{1}{n+2} & x=\frac{1}{n} \\ x & \text{אחרת} \end{matrix}\right\}$$

יש לבדוק כי f חח"ע ועל.