תרגול 06

מבוא להסתברות

הסתברות מותנה

גיא רוזנדורן, 01/06/2008 16:14

הסתברות מותנית

הסתברות מותנה

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

נוסחת בייס הפשוטה

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$$

נוסחת ההסתברות השלמה

נתונים מאורעות זרים $B_1, \dots B_k$ כך ש $B_1 \cap \dots \cap B_k = \emptyset$, ו $\cup_{i=1}^{k} B_i = \Omega$, ו A מאורע כלשהו. אז:

$$\mathrm{P(A) = \sum_{i=1}^{k} (A|B_i)P(B) = \sum_{i=1}^{k} P(A \cap B_i)}$$

הסתברות של חיתוך מאורעות

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_k) = P(A_1)P\left(A_2|_{A_1}\right)P(A_3|A_1 \cap A_2) * \dots * P(A_k|A_1 \cap \dots \cap A_{k-1})$$

קובייה

זורקים קובייה הוגנת.

א. מה הסיכוי לקבל 3?

ב. מישהו הסתכל על תוצאת הקובייה, ומספר לך שהתוצאה זוגית. מה הסיכוי שיצא 3?

$$P(B) = 0$$

ג. מישהו הסתכל על תוצאת הקובייה, ומספר לך שהתוצאה אי-זוגית. מה הסיכוי שיצא 3?

במקור $\Omega = \{1, \dots, 6\}$, עכשיו נשארו רק 3 תוצאות אפשרויות, ולכן:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}$$

כדורים

לוקחים 4 כדורים ללא החזרה מתוך 10 כדורים הממוספרים 1..10.

א. מה הסיכוי שיצא 7?

נקודה במרחב היא בחירה של 4 כדורים מתוך עשרה. אז $|\Omega| = 10^4$.

במאורע A בחרנו תחילה 7, ואח"כ בחרנו עוד שלושה כדורים. אז $|A| = 1 * \binom{9}{3}$. אז:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{9}{3}}{\binom{10}{4}} = \frac{\frac{9*8*7}{3!}}{\frac{10*9*8*7}{4!}} = \frac{4}{10}$$

ב. מה הסיכוי שיצא 7, אם נתון כי יצא 9?

במאורע B יצא 9 כשנתון שיצא גם 7.

שואלים מהי ההסתברות של A בהינתן B, כלומר, 7 ו-9 בטוח יוצאים. אז:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{|A \cap B|}{|\Omega|}}{\frac{|B|}{|\Omega|}} = \frac{|A \cap B|}{|B|}$$

במאורע החיתוך $|A \cap B|$ יצאו גם 7 וגם 9, ולכן צריך לבחור רק עוד 2 כדורים. אז: $|A \cap B| = \binom{8}{2}$.

במאורע B יצא 9 אז צריך לבחור עוד 3 כדורים. אז $|B| = \binom{9}{3}$. אז:

$$P(A|B) = \frac{\binom{8}{2}}{\binom{9}{3}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

ג. מה הסיכוי שיצא 7, אם נתון כי לא יצא אף מספר הקטן מ-4?

במאורע C לא יצא אף מספר שקטן מארבע, ושואלים מהי ההסתברות של A בהינתן C.

במאורע C צריך לבחור רק 4 כדורים מתוך 7 מספרים. אז $|C| = \binom{7}{4}$.

במאורע $A \cap C$, 7 נבחר, וצריך לבחור 3 כדורים מהמספרים 4,5,6,8,9,10. אז $|A \cap C| = \binom{6}{3}$.

$$P(A|C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{|A \cap C|}{|C|} = \frac{\binom{6}{3}}{\binom{7}{4}} = \frac{4}{7}$$

ד. מה הסיכוי שלא יצא 7, אם נתון כי לא יצא אף מספר הקטן מ-4?

שואלים מהי ההסתברות של המשלים של A, בהינתן C.

היות והסתברות מותנה היא הסתברות וכל חוקי ההסתברות תקפים עליה, אז:

$$P(\bar{A}|C) = 1 - P(A|C) = 1 - \frac{4}{7} = \frac{3}{7}$$

אי

באי יש אוכלוסייה הכוללת 60% נשים ו-40% גברים. ל-50% מהנשים ול-55% מהגברים עיניים ירוקות.

א. מה הסיכוי שלאדם אקראי יהיו עיניים ירוקות?

נסמן מאורע A שבו אדם הוא גבר, ומאורע B שלאדם יש עיניים ירוקות.
נתונה ההסתברות של A $P(A) = 40\%$, ההסתברות של B בהינתן A $P(B|A) = 55\%$ וההסתברות של B בהינתן המשלים של A $P(B|\overline{A}) = 50\%$. שואלים מהי ההסתברות של $P(B)$. נפתור בשתי דרכים:

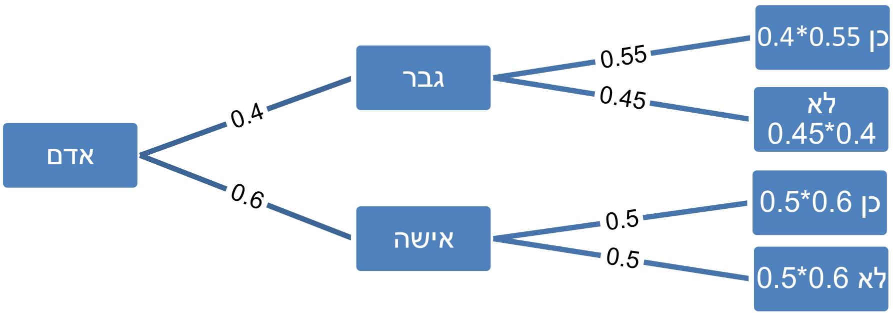
לפי נוסחת ההסתברות השלמה:

$$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|\overline{A})P(\overline{A})$$

זאת נוסחת ההסתברות השלמה, כי B התחלף עם A, ושני המאורעות הזרים הם A והמשלים שלו. אז:

$$P(B) = 0.55 * 0.4 + 0.5 * 0.6 = 0.22 + 0.3 = 0.52 = 52\%$$

לפי תרשים העץ:



לפי תרשים העץ, סוכמים את העלים הרלוונטיים ומקבלים את התשובה: 0.4*0.55+0.6*0.5.
לפעמים יותר נוח להשתמש בנוסחה, ולפעמים יותר נוח לצייר את העץ ולסכום את העלים.

ב. מה הסיכוי שאדם עם עיניים ירוקות הוא גבר?

שואלים מה הסיכוי של A בהינתן B:
לפי נוסחת בייס:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} = \frac{0.55 * 0.4}{0.52} = \frac{0.22}{0.52} \sim 42\%$$

לפי תרשים העץ:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.4 * 0.55}{0.4 * 0.55 + 0.5 * 0.6}$$

מכונת אמת

נתון כי מכונה אמת צודקת ב- 95% מהמקרים: ב- 95% מהמקרים שאדם משקר היא אומרת שהוא משקר, וב-95% מהמקרים שאדם דובר אמת היא אומרת שהוא דובר אמת. במפעל המונה 1,000 עובדים בוצעה מעילה ונגנב כסף רב. נתון כי המעילה בוצעה ע"י עובד בודד של החברה (ללא שותפים לפשע). אלי (אחד העובדים) נבחר באקראי, נשאל במכונת אמת האם הוא הגנב, וענה שלא. המכונה אמרה שהוא שיקר. מה הסיכוי שאלי הגנב?

נסמן מאורע A שאלי הגנב. הוא בן אחד מתוך אלף, לכן ההסתברות האפריורית: $P(A)=\frac{1}{1000}=0.1\%$.

נסמן מאורע B שבו המכונה אומרת שאלי שיקר.

נתונה ההסתברות שהמכונה אמרה שהוא שיקר (B) בהינתן שאלי גנב (A), $P(B|A)=95\%$

נתונה ההסתברות שהמכונה אמרה שהוא דובר אמת $(\overline{B})$ בהינתן שאלי לא גנב (A), $P(\overline{B}|\overline{A})=95\%$.

שואלים מהי ההסתברות שאלי הוא הגנב, בהינתן שהמכונה אמרה שהוא שיקר:

$$P(A|B)=\frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

לפי נוסחת ההסתברות השלמה:

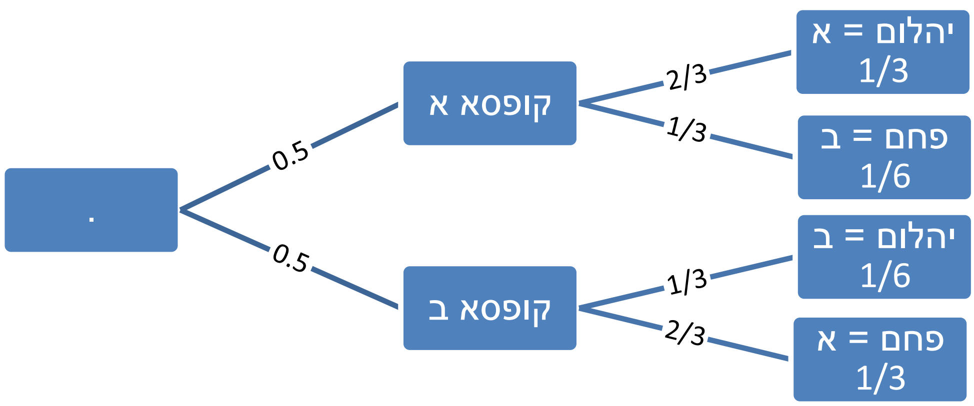
$$P(B)=P(B|A)P(A)+P(B|\overline{A})P(\overline{A})=$$
$$0.95*0.001+0.05*0.999\sim 0.001+0.05\sim 0.051$$

אז:

$$P(A|B)=\frac{0.95*0.001}{0.051}\sim\frac{0.01}{0.51}=2\%$$

נסיכה

נסיכה עומדת להתחתן. המלך מניח על השולחן שתי קופסאות הנראות זהות. באחת מהן 2 יהלומים ואבן פחם אחת, ובשנייה 2 אבני פחם ויהלום. הנסיכה יכולה לבחור קופסא ולדגום באקראי אחת האבנים בקופסא. לאחר שהנסיכה ראתה מה היא האבן, האבן מוחזרת לקופסא, והנסיכה צריכה לבחור את אחת הקופסאות (לקבל את תכולתה במתנה). הנסיכה החליטה לנקוט באסטרטגיה הבאה: לבחור באקראי קופסא, אם יצא יהלום לבחור בקופסא זו, ואם יצא פחם לבחור בקופסא השנייה. מה הסיכוי שנסיכה תבחר בקופסא עם 2 היהלומים?



קופסא א היא הקופסא עם שני היהלומים, ושואלים מהו הסיכוי שתבחר בקופסא זו? אז נסכם את העלים הרלוונטיים: העלה העליון והתחתון, כלומר $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.

תרגול 06

מבוא להסתברות

הסתברות מותנה

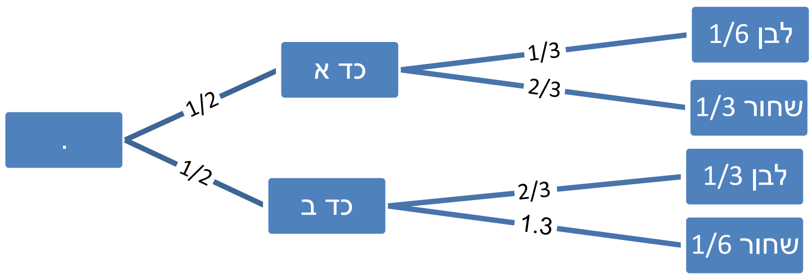
גיא רוזנדורן, 01/06/2008 16:14

כדורים

נתונים שני כדים הנראים מבחוץ זהים. כד א' עם 2 כדורים שחורים וכדור לבן, וכד ב' עם 2 כדורים לבנים וכדור שחור. בוחרים באקראי כד, בוחרים ממנו באקראי כדור, ובוחרים ממנו כדור נוסף (עם החזרה).

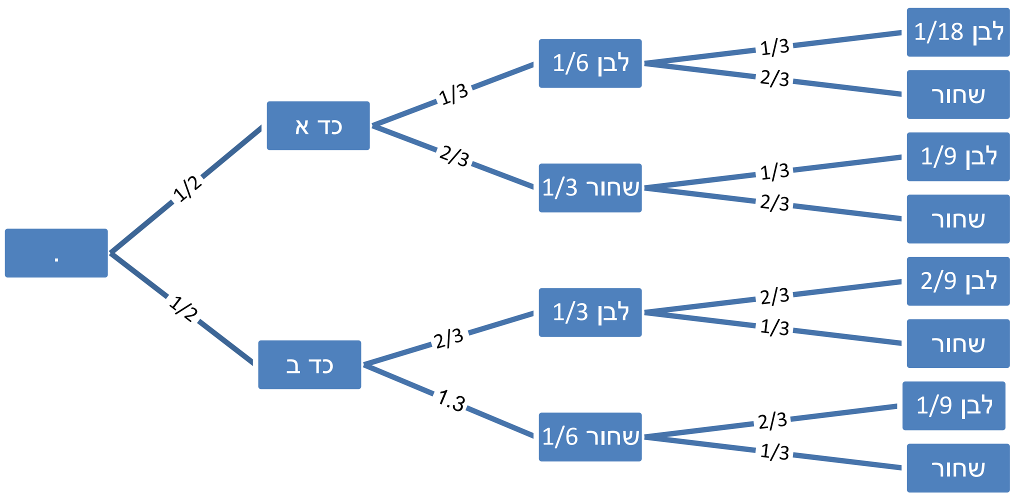
א. נגדיר מאורע A שבו הכדור הראשון הוא לבן, ושואלים מהי ההסתברות של A?

אינטואיטיבית יש סימטריה בין השחור והלבן, ולכן: $P(A)=\frac{1}{2}$. לפי תרשים העץ:



אז: P(לבן) = (1/6)+(1/3) = (1/2).

ב.



אז $P(\text{לבן})=\frac{1}{18}+\frac{1}{9}+\frac{2}{9}+\frac{1}{9}=\frac{1}{2}$.

ג. במאורע A כד' א' נבחר. במאורע B הכדור הראשון בו לבן. אז:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$$

ד. במאורע B הכדור הראשון לבן. במאורע C כדור שני לבן. אז:

$$P(C|B)=\frac{P(C\cap B)}{P(B)}$$

נסכם את העלים המתאימים:

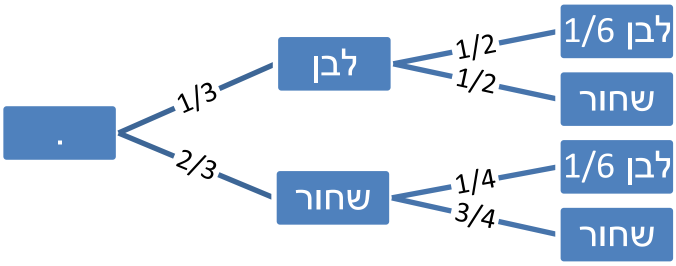
$$P(C|B)=\frac{\frac{1}{2}*\frac{1}{3}*\frac{1}{3}+\frac{1}{2}*\frac{2}{3}*\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}*\frac{1}{3}*\frac{1}{3}+\frac{1}{2}*\frac{2}{3}*\frac{1}{3}+\frac{1}{2}*\frac{1}{3}*\frac{2}{3}+\frac{1}{2}*\frac{2}{3}*\frac{1}{3}}=\frac{\frac{1}{18}+\frac{4}{18}}{\frac{1}{18}+\frac{4}{18}+\frac{2}{18}+\frac{2}{18}}=\frac{\frac{5}{18}}{\frac{9}{18}}=\frac{5}{9}$$

הכד של פוליה

נתון כד עם כדור לבן ושני כדורים שחורים. בכל שלב מוציאים כדור, מסתכלים על צבעו, ומחזירים אותו ביחד עם כדור נוסף מאותו הצבע לבד. עושים זאת 10 פעמים (מוציאים 10 כדורים).

א. מה הסיכוי שהכדור הראשון לבן?

נסמן מאורע A_k שבו הכדור ה-k הוא לבן. טריוויאלי ש $P(A_1)=\frac{1}{3}$. נמצא את $P(A_2)$ בעזרת העץ:



$$P(A_2)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$$
$$P(A_2|A_1)=\frac{1}{2}$$
$$P(A_2|\overline{A}_1)=\frac{1}{4}$$
$$P(A_2)=P(A_2|A_1)P(A_1)+P(A_2\overline{A}_1)P(\overline{A}_1)=\frac{1}{2}*\frac{1}{3}+\frac{1}{4}*\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$
$$\vdots$$
$$P(A_k)=\frac{1}{3}$$

אפשר להוכיח את זה באינדוקציה, או בעזרת 10 עצים, לא נעשה את זה.

ב. כעת, נתון כי יש בכד בהתחלה כדור לבן וכדור שחור.

1. מה הסיכוי שכל 10 הכדורים שהוצאנו לבנים?

יצא כדור לבן, אז נכניס 2 לבנים. עכשיו יש 2 לבנים מתוך 3. אם יצא לבן, אז ייכנסו 2 לבנים, ואז יהיו 3 לבנים מתוך ארבע, וכך הלאה. אז:

$$P(A_1\cap\ldots\cap A_{10})=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1\cap A_2)*\ldots*P(A_{10}|A_1\cap\ldots\cap A_{10})=\frac{1}{2}*\frac{2}{3}*\frac{3}{4}*\ldots*\frac{9}{10}*\frac{10}{11}=\frac{1}{11}$$

2. מה הסיכוי שבדיוק כדור אחד שחור ו-9 לבנים?

נסמן מאורע B שבו בדיוק כדור אחד שחור ו- 9 לבנים. מצד שני, $B=\cup_{i=1}^{10}C_i$ כאשר במאורע ה C_i הכדור ה-i שחור וכל השאר לבנים. אז:

$$P(C_1)=P(\overline{A}_1\cap A_2\cap\ldots A_{10})=P(\overline{A}_1)P(A_2|\overline{A}_1)P(A_3|A_2\cap\overline{A}_1)*\ldots*P(A_{10}|A_9\cap\ldots\cap A_2\cap\overline{A}_1)$$
$$=\frac{1}{2}*\frac{1}{3}*\frac{2}{4}*\frac{3}{5}*\frac{4}{6}*\ldots*\frac{8}{10}*\frac{9}{11}=\frac{1}{10*11}$$
$$P(C_2)=\frac{1}{2}*\frac{1}{3}*\frac{2}{4}*\ldots*\frac{9}{11}=\frac{1}{10*11}$$
$$\vdots$$
$$P(C_k)=\frac{1}{2}*\frac{2}{3}*\ldots*\frac{k-1}{k}*\frac{1}{k+1}*\frac{k+1}{k+3}*\ldots*\frac{9}{11}=\frac{1}{10*11}$$
$$P(B)=\cup_{i=1}^{10}=10*\left(\frac{1}{10*11}\right)=\frac{1}{11}$$