תרגול 06

אלגברה ליניארית 2

[Comments]

גיא רוזנדורן, 11/06/2008 08:12

תרגיל

חשב A^{100} עבור:

שימו לב שאם A דומה ל B, כלומר קיימת מטריצה P הפיכה כך ש $B = P^{-1}AP$. אזי:

$$B^n = (P^{-1}AP)^n = P^{-1}AP * P^{-1}AP * \dots * P^{-1}AP = P^{-1}A^nP$$

נלכסן את A. נחשב תחילה פולינום אופייני.

$$\begin{vmatrix} x+1 \\ 3 \\ 3 \end{vmatrix}$$

נחשב את המרחב העצמי V_2 של ערך עצמי 2, כלומר מרחב הפתרונות למערכת $(A-2I)x = 0$.

$$(A-2I)v = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 3 & -1 & 0 \\ -3 & 3 & -1 & 0 \\ -3 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$V_2 = \operatorname{span}\{(1,0,-3),(0,1,3)\}$$

לכן, הריבוי הגיאומטרי של ערך עצמי 2 הוא 2. כלומר המטריצה לכסינה.

הריבוי האלגברי של V_1 הוא גם 1, וגם הריבוי הגיאומטרי שלו, ולכן A לכסינה.

נחשב את המרחב העצמי של ערך עצמי 1:

$$(A-1I)v = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 & 0 \\ -3 & 4 & -1 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

תזכורת: המטריצה המלכסנת P תהיה כזו שעמודותיה הן בסיס של וקטורים עצמיים למרחב $\mathbb{R}^3$.

לכן, במקרה שלנו:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

מחשבים ויוצא:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

אפשר לסדר את הוקטורים העצמיים בכל סדר שהוא במטריצה P. זה רק ישפיע על סדר הערכים העצמיים באלכסון של המטריצה האלכסונית. התוצאה לא תשתנה.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = P^{-1}AP$$

$$A = PDP^{-1}$$

$$A^{100} = PD^{100}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{100} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

תרגיל

תהי $A \in M_{10}(\mathbb{R})$, נתון $A^2 = I$, $\operatorname{tr} A = 6$. חשבו $f_A(x), m_A(x)$:

לפי הנתון, $A^2 - I = 0$, כלומר A מאפסת את הפולינום $x^{-1} = (x+1)(x-1) = 0$.

תזכורת: $g(A) = 0$ אם ורק אם $m_A | g(x)$. לכן: הפולינום המינימאלי $m_A(x)$ יכול להיות:

$$m_A(x) = \cancel{1}, x+1, x-1, (x+1)(x-1)$$

נעבור על כל האופציות ונפסול אותן.

1 לא יכול להיות הפולינום המינימאלי כי שום דבר לא מאפס אותו.

תזכורת: מטריצה A לכסינה אם ורק אם הפולינום המינימאלי של A מתפרק למכפלה של גורמים ליניאריים שונים. לגבי פולינום אופייני: אם הוא מתפרק לגורמים ליניאריים שונים אז המטריצה לכסינה. אם המטריצה לכסינה אז הפולינום האופייני מתפרק לגומרים ליניאריים, אבל לא בהכרח שונים.

במקרה שלנו, הפולינום המינימאלי מתפרק למכפלה של גורמים ליניאריים. לכן המטריצה לכסינה, והערכים העצמיים הם 1 או -1 או שניהם, ואלה הם הערכים העצמיים האפשריים. לכן במטריצה האלכסונית יופיעו a פעמים הערך העצמי 1 ו 10-a פעמים הערך העצמי -1.

תזכורת: למטריצות דומות יש אותה עכבה. לפי הנתון: $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} D = 6$. לכן $a + (10-a)(-1) = 6$.

כלומר $a = 8$, לכן הצורה האלכסונית היא:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

לכן הפולינום האופייני הוא: $(x-1)^8(x+1)^2$, והפולינום המינימאלי הוא $(x+1)(x-1)$.

משפט

למטריצות דומות אותו פולינום מזערי.

הוכחה:

נניח A מטריצה, ו- $g(x)$ פולינום כך ש $g(A) = 0$. תהי B מטריצה שדומה ל-A, כלומר $B = P^{-1}AP$.

נרשום את הפולינום $g = \sum g_i x^i$, אזי: $g(B) = \sum g_i B^i$. אזי:

$$P^{-1}g(B)P = \sum g_i PB^iP^{-1} = \sum g_i (PBP^{-1})^i = \sum g_i A^i = g(A) = 0$$

$$\Rightarrow g(B) = 0$$

כלומר, קיבלנו שאם B,A מטריצות דומות, אזי A מאפסת פולינום מסוים אם ורק אם B מאפסת אותו.

בפרט, זה נכון לפולינום המינימאלי. לכן, $m_A(B) = 0$ ולהפך $m_B(A) = 0$.

תזכורת: פולינום מתאפס ע"י מטריצה אם ורק אם הוא מתחלק בפולינום המינימאלי שלה, אז במקרה הזה הפולינום המינימאלי של A מתחלק בפולינום המינימאלי של B: $m_A | m_B$ ו $m_A | m_B$.

כלומר, m_A, m_B הם אותו פולינום עד כדי כפולה בקבוע. מכיוון ששניהם מתוקנים, הם שווים: $m_A = m_B$.

תרגול 06

אלגברה ליניארית 2

[Comments]

גיא רוזנדורן, 11/06/2008 08:12

תת-מרחב אינווריאנטי

אם $T: V \to V$ העתקה ליניארית, $U \subseteq V$ נקרא תת-מרחב אנווריאנטי-T אם $T(U) \subseteq U$.

דוגמא:

$$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$T(x, y) = T(y, x)$$

תת-המרחב $\text{span}\{(1,0)\}$ ו $\text{span}\{(0,1)\}$ אינם אינווריאנטים-T, כי הם מועתקים לתת-מרחב אחר.
לעומת זאת, תת-המרחב $\text{span}\{(1,1)\}$ הוא אינווריאנטי T.

תרגיל 6.7 ברשימות של דן

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F, ויהי $W \subseteq V$ תת-מרחב אינווריאנטי T.
ונניח ש $f, g \in F[x]$.
א. הוכח ש W אינווריאנטי- g(T).
ב. הוכח ש f(T)(w) אינווריאנטי- g(T).
ג. הוכח שאם $V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_r$ כאשר W_i תתי-מרחבים אינווריאנטים-T, אזי:
$$f(T)(V) = f(T)W_1 \oplus \ldots \oplus f(T)(W_r)$$

א. נסמן $g(x) = \sum g_i x^i$. שימו לב שאם $T(w) \in W$ אזי גם $T^2(w) \in W$, ובאופן דומה $T^i(w) \in W$ לכל i.
לכן, אם $w \in W$ אזי: $g(T)(w) = (\sum g_i T^i)(w) = \sum g_i T^i(w) \in W$. כלומר, W אינווריאנטי- g(T).
ב. לפי א', מספיק להראות ש $f(T)(w)$ אינווריאנטי ביחס ל-T. יהי $(\sum f_i T^i)(w) \in F(T)(w)$. אז:
$$T\left(\sum f_i T^i(w)\right) = \sum f_i T^{i+1}(w) = \sum f_i T^i\big(T(w)\big)$$
$$T(w) = w' \in W$$
$$= \sum f_i T^i(w') = f(T)(w') \in f(T)(w)$$
ג. נניח $f(T)(v) \in f(T)(V)$. נרשום: $v = w_1 + w_2 + \cdots . + w_r \; ; w_i \in W_i$. אזי:
$$f(T)(v) = f(T)(w_1 + \cdots + w_r) = f(T)(w_1) + \cdots + f(T)(w_r)$$
$$f(T)(w_1) \in f(T)(W_1)$$
$$\vdots$$
$$f(T)(w_r) \in F(T)(W_r)$$
הראנו שהמחשב מתפרק לסכום של איברים כאלה, ונבדוק בבית שזה סכום ישר: מראים שזו הצגה יחידה, כלומר $w_1 + \cdots + w_r = w_1' + \cdots + w_r'$.

תרגול 06

אלגברה ליניארית 2

[Comments]

גיא רוזנדורן, 11/06/2008 08:12

תרגיל

בדוק האם המטריצות הבאות לכסינות מעל $\mathbb{R}$:

(1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

$$m_C(x) = \mathrm{lcm}\big(m_A(x), m_B(x)\big)$$

$$f_A(x) = \begin{vmatrix} x-1 & -1 \\ -1 & x-1 \end{vmatrix} = x^2 - 2x = x(x-2)$$

$$\Rightarrow m_A(x) = x(x-2)$$

$$f_B(x) = \begin{vmatrix} x-1 & 2 \\ -2 & x-4 \end{vmatrix} = x^2 - 5x + 8$$

הפולינום $f_B(x)$ לא פירק מעל $\mathbb{R}$. אז:

$$m_C(x) = \mathrm{lcm}(x(x-2), x^2 - 5x + 8)$$

היות והפולינומים זרים, המחלק המשותף המינימאלי הוא המכפלה שלהם:

$$m_C(x) = x(x-2)(x^2 - 5x + 8)$$

לכן $m_C(x)$ לא מתפרק למכפלה של גורמים ליניאריים, ולכן C אינה לכסינה.

---

(2)

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

$$f_A(x) = \begin{vmatrix} x-2 & 0 \\ -3 & x-2 \end{vmatrix} = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$$

לכן m_A הוא $(x-2)$ או $(x-2)^2$. אבל $(A - 2I \neq 0)$ כלומר $m_A(x) \neq x - 2$

ולכן $m_A(x) = (x-2)^2$. לכן: $m_D(x) = \mathrm{lcm}((x-2)^2)$ לכן $(x-2)^2 | m_D(x)$,

לכן D לא לכסינה.

הערה: יכול להיות שכל המטריצות הקטנות לכסינות, אבל הגדולה לא.

---

(3)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נבדוק לבד בבית.

תרגיל

תהי מטריצה $A \in M_n(\mathbb{C})$ כך ש $A^8 + A^2 = I$. הוכח ש A לכסינה.

לפי הנתון, A מאפסת את הפולינום $g(x) = x^8 - x^2 - 1$.
נרצה להראות שהפולינום המינימאלי מתפרק למכפלה של גורמים ליניאריים שונים. נניח בשלילה שיש איזשהו $\lambda \in \mathbb{C}$ כך ש $(x-\lambda)^2 | m_A(x)$. לפי הנתון, $m_A(x)|g(x)$, לכן $(x-\lambda)^2|g(x)$.
נרשום: $g(x) = (x-\lambda)^2 h(x)$. אם פולינום מתחלק בשורש מסוים, אז גם הנגזרת:

$$g^{'}(x) = 2(x-\lambda)h(X) + (x-\lambda)^2 h^{'}(x)$$

$$g(\lambda) = 0, g^{'}(\lambda) = 0$$

$$\lambda^8 + \lambda^2 - 1 = 0$$

$$8\lambda^7 + 2\lambda = 0 \Rightarrow 8\lambda^6 + 2 = 0 \Rightarrow \lambda^6 = -\frac{1}{4}$$

$$\lambda^2(\lambda^6) + \lambda^2 - 1 = \lambda^2\left(-\frac{1}{4}\right) + \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda^2\left(\frac{3}{4}\right) = 1 \Rightarrow \lambda^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow \lambda = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\lambda^6 = \frac{64}{9} \neq -\frac{1}{4} \Rightarrow \text{סתירה}$$

כלומר, השורש הוא לא כפול, ולכן הפולינום למכפלה של גורמים ליניאריים שונים, ולכן היא לכסינה.