צורת ז'ורדן

איך מוצאים את מטריצת ז'ורדן?

נניח $A \in M_n(F)$ עם פולינום מינימאלי המתפרק למכפלה של גורמים ליניאריים. אזי עבור ערך עצמי λ מתקיים:

- סכום סדרי הבלוקים המתאימים לערך עצמי λ הוא הריבוי האלגברי שלו.
- מספר הבלוקים הוא בדיוק הריבוי הגיאומטרי של λ.
- גודל הבלוק הגדול ביותר המתאים ל λ הוא הריבוי של $(x-\lambda)$ בפולינום המינימאלי.
- מספר הבלוקים בגודל i : $-\dim\ker(A-\lambda I)^{i-1} + 2\dim\ker(A-\lambda i)^{i} - \dim\ker(A-\lambda i)^{i+1}$ כאשר הגרעין של מטריצה מרחב הפתרונות

מקרה פרטי:
אם במקרה כל הריבויים הגיאומטריים שווים לריבויים האלגבריים, אז מטריצת ז'ורדן היא מטריצה אלכסונית והיא לכסינה.

תרגיל

מצא צורן ז'ורדן של המטריצה הבאה מעל $\mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

אם הפולינום האופייני מתפרק לגורמים ליניאריים אז כך גם הפולינום המינימאלי, ויש מטריצת ז'ורדן.
מחשבים פולינום אופייני ויוצא: $(x+2)(x-1)^3$. לכן לערך עצמי (-2) יש בלוק אחד בגודל 1.
מחשבים פולינום מינימאלי ויוצא: $(x+2)(x-1)^2$. לכן גודל הבלוק הגדול ביותר שמתאים לערך עצמי (1) הוא 2. לכן יש שני בלוקים שמתאימים לערך עצמי (1) – אחד בגודל 2 ואחד בגודל 1.
לכן צורת ז'ורדן של A היא יחידה עד כדי סדר הבלוקים:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & \begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

תרגיל נוסף

מצא צורת ז'ורדן של:

$$A = \begin{pmatrix} \begin{matrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{matrix} & 0 & 0 \\ 0 & \begin{matrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{matrix} & 0 \\ 0 & 0 & \begin{matrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

במטריצת בלוקים, הפולינום האופייני תהיה מכפלת הפולינומים האופייניים של המטריצות הקטנות, והפולינום המינימאלי יהיה ה $\mathrm{lcm}\left(m_{A_1}(x), m_{A_2}(x), m_{A_3}(x)\right)$ שלהם.

מחשבים פולינום אופייני ויוצא:

$$f_{A_1}(x) = m_{A_1}(x) = (x+2)^2(x-4)$$
$$f_{A_2}(x) = m_{A_2}(x) = (x-1)(x-4)^2$$
$$f_{A_3}(x) = m_{A_3}(x) = (x+2)^2$$

במקרה זה יצא שכל פולינום אופייני שווה למינימאלי, זה לא תמיד יוצא ככה.

$$f_A(x) = f_{A_1}(x) f_{A_2}(x) f_{A_3}(x) = (x-1)(x-4)^3(x+2)^4$$
$$m_A(\mathrm{x}) = \mathrm{lcm}\left(\mathrm{m}_{A_1}(x), m_{A_2}(x), m_{A_3}(x)\right) = (\mathrm{x}+2)^2(\mathrm{x}-4)^2(\mathrm{x}-1)$$

לערך עצמי 1 יש ריבוי אלגברי 1 וריבוי גיאומטרי 1 ולכן יש בלוק 1 מגודל 1.

לערך עצמי 4 יש ריבוי אלגברי 3 יש בלוק מקסימאלי בגודל 2 וסכום הגדלים 3 ולכן יש בלוק בגודל 2 ועוד בלוק בגודל 1

לערך עצמי (-2) יש ריבוי אלגברי 4 ובלוק בגודל מקסימאלי 2, לכן האפשרויות הן: 2,2 או 2,1,1.

נחשב ריבוי גיאומטרי של הערך העצמי ע"י דירוג $(A+2I)$ ומתקבל ריבוי גיאומטרי 2. לכן יש שני בלוקים לערך עצמי (-2) לכן האופציה הנכונה היא 2,2.

לכן צורת ז'ורדן היא עד כדי סדר הבלוקים:

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2
\end{pmatrix}$$

עוד דוגמא

מצא צורת ז'ורדן של:

$$A = \begin{pmatrix}
-3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3
\end{pmatrix}$$

מחשבים פולינומים:

$$f_{A_1}(x) = m_{A_1}(x) = (x+1)^2$$
$$f_{A_2}(x) = m_{A_2}(x) = (x+1)^2(x-3)$$
$$f_{A_3}(x) = m_{A_3}(x) = (x-3)$$
$$f_A(x) = (x+1)^4(x-3)^2$$
$$m_A(x) = \mathrm{lcm}\left(m_{A_1}(x), m_{A_2}(x), m_{A_3}(x)\right) = (x+1)^2(x-3)$$

לכן:

לערך עצמי (-1) יש בלוק מגודל מקסימאלי 2, וסכום סדרי הבלוקים הוא 4. הריבוי הגיאומטרי (חישבנו מראש) הוא 2. לכן יש שני בלוקים והם מגודל 2.

לערך עצמי (3) יש שני בלוקים והגודל של הבלוק המקסימאלי הוא 1. לכן יש 2 בלוקים בגודל 1.

צורת ז'ורדן:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

תרגיל

חשבו צורת ז'ורדן של:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

מחשבים פולינום אופייני, וקל לראות ש $f_A(x)=(x-0)^7=x^7$.

מחשבים פולינום מינימאלי, ומתקבל $m_A(x)=x^3$

מחשבים הריבוי הגיאומטרי של ערך עצמי (0) ומתקבל: 3

לכן יש 3 בלוקים בגודל 3 לכל היותר, לפחות אחד מהם בגודל 3 בדיוק, וסכום הסדרים הוא 7.

האופציות הן: 3,3,1 או 3,2,2, ולא ניתן להכריע מביניהן בעזרת שלושת האילוצים הראשונים.

נרשום את התכונה הרביעית:

מספר הבלוקים בגודל i : $-\dim\ker(A-\lambda I)^{i-1}+2\dim\ker(A-\lambda i)^{i}-\dim\ker(A-\lambda i)^{i+1}$ כאשר הגרעין של מטריצה מרחב הפתרונות. זאת הדרך הקשה יותר למצוא את צורת ז'ורדן, אז נשתמש בה רק כאשר אי אפשר להכריע בעזרת שלושת הקריטריונים הראשונים.

במקרה שלנו, נבדוק כמה בלוקים יש מסדר 3: $-\dim\ker A^2+2\dim\ker A^3-\dim\ker A^4$.

A^3 זה הפולינום המינימאלי ולכן $A^3=0$ ולכן $\dim\ker A^3=7$ וגם $\dim\ker A^4=0$.

לכן מספר הבלוקים מסדר 3 הוא: $-\dim\ker A^2+7$ ומחישוב מראש של אלעד מתקבל $7-6=1$.

לכן יש בלוק אחד מגודל 3, ולכן יש בלוק אחד בגודל 3 ושני בלוקים בגודל 2. צורת ז'ורדן:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

איך מוצאים את המטריצה המז'רדנת? ??

אנחנו רוצים למצוא מטריצה P הפיכה כך ש $P^{-1}AP = J$ כך ש J צורת ז'ורדן של A.
לכל ערך עצמי λ נמצא n_λ (=הריבוי האלגברי של λ) וקטורים ש-"קשורים אליו" – כל הווקטורים האלו ביחד – יהיו עמודות P. הסדר משפיע על צורת ז'ורדן, אבל זה לא משנה.

נניח λ ערך עצמי. נסמן $N = A - \lambda I$. נסמן ב l את החזקה של $(x-\lambda)$ בפולינום המינימאלי.
נגדיר $W_j = \ker(N^j)$ לכל $0 \le j \le l$.
שימו לב ש $w_{j-1} \subseteq w_j$ (כי אם $N^{j-1}v = 0$ ולכן גם $N^j v = N(N^{j-1}v) = N * 0 = 0$).
קיבלנו סדרה של תת-מרחבים $W_0 \subseteq W_1 \subseteq \cdots \subseteq W_l$.

האלגוריתם

יהי B_l משלים לבסיס של W_l ביחס ל W_{l-1}.
1. עבור $j = l$ עד $j = 1$ השלם את $N(B_j)$ לקבוצה B_{j-1} כך ש B_{j-1} משלים לבסיס של W_{j-1} ביחס ל W_{j-2}. כלומר, להפעיל את N על כ"א מהווקטורים בקבוצה, כלומר לכפול את N בכ"א מהווקטורים
2. החזר את $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_l$

לכל ערך עצמי λ, מגדיר $N = A - \lambda$ ומייצר עבורם קבוצה של וקטורים. נאסוף את כל הווקטורים האלה וזה יהיה הבסיס.

דוגמא

ז'רדן (מצא את המטריצה המז'רדנת ואת צורת ז'ורדן) את:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -16 & 0 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

מחשבים פולינום אופייני ומינימאלי, ויוצא שהם שווים: $(x+2)^2(x-2)^2$.
לכן לכל ערך עצמי בלוק מקסימאלי בגודל 2 וסה"כ הסדרים 2. לכן לכל ערך עצמי בלוק אחד בגודל 2. מטריצת ז'ורדן:

$$\begin{pmatrix} \begin{matrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{matrix} & 0 \\ 0 & \begin{matrix} -2 & 0 \\ 1 & -2 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

עבור $\lambda = 2$: נסמן $N = A - 2I$.

$$W_1 = \ker(A - 2I) = \left\{ \left(\frac{1}{8}t, \frac{1}{4}t, \frac{1}{2}t, t \right) \middle| t \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{span}\{(1,2,4,8)\}$$

$$W_2 = \ker((A - 2I)^2) = \left\{ \left(\frac{3s - t}{4}, \frac{4s - t}{4}, s, t \right) \middle| s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\dim\ker W_1 = 1 \quad \dim\ker W_2 = 2$$

ניקח וקטור $v = (3,4,4,0)$ מתוך W_2 שלא שייך ל W_1.
האלגוריתם אומר להכפיל $Nv = (-2-4, -8, -16)$ לכן קיבלנו וקטור שמשלים את W_0 ל W_1.
לכן הווקטורים $(3,4,4,0), (-2,-4,-8,-16)$ יהיו שני ווקטורים ב P.

מטריצת ז'ורדן היא יחידה, המטריצה המז'רדנת אינה יחידה.

עבור $\lambda = -2$: נסמן $N = A + 2I$.

נגמר הזמן, אז לא נכתוב את כל החישובים.

יוצא ש $\dim W_1 = 1$ ו $\dim W_2 = 2$, כמו מקודם.

עושים את אותו תהליך בדיוק, ומקבלים את הווקטורים $v(3,-4,4,0) \in W_2$ ו $Nv = (2,-4,8,-17) \in W_1$.

לכן, המטריצה המז'רדנת היא:

$$P = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 & 2 \\ 4 & -4 & -4 & -4 \\ 4 & -8 & 4 & -8 \\ 0 & -16 & 0 & -16 \end{pmatrix}$$

בבית: תבדקו את כל החישורים ותוודאו ש $P^{-1}AP = J$.