תרגול 08

חדו"א 2

סדרות של פונקציות

גיא רוזנדורן, 01/06/2008 08:07

סדרות וטורי פונקציות

הגדרה

תהי $\{f_n|E \to \mathbb{R}\}$ סדרת פונקציות. נניח ש $x \in E$ אז אם $f_n(x) \to_{n\to\infty} a$ אומרים שהסדרה $\{f_n\}$ מתכנסת ב x אם $\{f_n\}$ מתכנסת ב x לכל $x \in E$ אומרים שהסדרה מתכנסת ב E נקודתית. נגדיר במקרה זה את $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, ונסמן $f_n \to f$.

הסדרה $f_n \to f$ במידה שווה אם לכל $\epsilon > 0$ קיים n_0 כך שלכל $n \geq n_0$ כך שלכל $x \in E$ $|f_n(x) - f(x)|\epsilon$. נסמן במקרה הזה $f_n \rightrightarrows f$.

דוגמאות

(1)

$$\{f_n(x) = e^{-x}\}$$

$$A > 0, x \in [A, \infty]$$

$$x \in [0, \infty]$$

קודם נמצא את הפונקציה הגבולית:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & x > 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

נבדוק אם $f_n(x)$ רציפה במידה שווה:

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \Leftrightarrow \sup_{x\in E}|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

$$E = [A, \infty], f|_E \equiv 0$$

$$\sup_{x\in E}|f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\geq A} e^{-nx} = e^{-nA}$$

$$e^{-nA} \to_{n\to\infty} 0 \Leftrightarrow f_n \rightrightarrows f$$

ואכן $e^{-nA} \to 0$ ולכן יש התכנסות במידה שווה.

$$E = (0, \infty)$$

$$\sup_{x\in E}|f_n(x) - f(x)| = \sup_{x>0} e^{-nx} = 1 \nrightarrow_{n\to\infty} 0$$

ולכן f_n אינה מתכנסת במידה שווה על $[0, \infty]$

---

(2)

נסתכל על הסדרה $f_n(x) = \frac{1}{x^2+n}$ כאשר $x \in \mathbb{R}$.

נמצא את הפונקציה הגבולית:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x^2 + n} = 0$$

האם ההתכנסות היא במידה שווה?

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{1}{x^2 + n} = \frac{1}{n} \to_{n\to\infty} 0$$

ולכן יש התכנסות במידה שווה.

---

(3)

נסתכל על הסדרה $f_n(x) = \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n$ ונבדוק אם היא רציפה במידה שווה בשני מקרים: בקטע חסום $E = [-A, A]$ וב-$E = \mathbb{R}$.

נמצא תחילה את הפונקציה הגבולית:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{-x^2}{n}\right)^n = e^{-x^2}$$

א. $E = [-A, A]$. על פי משפט Dini, $f_n \rightrightarrows f$ על E: אם סדרת פונקציות רציפות מונוטוניות מתכנסת נקודתית לפונקציה רציפה, אז ההתכנסות היא במ"ש.

ב. עבור x מאוד גדול: $f_n(x)$ שואף לאינסוף ו $f(x)$ שואף לאפס, לכן ה $\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x) - f(x)| = \infty$ ולכן אין התכנסות במידה שווה.

$$f_n(x) = \frac{n^2x^2}{1+n^2x^2}$$
$$x \in \mathbb{R}$$

נמצא את הפונקציה הגבולית:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 1 & x \neq 0 \end{cases}$$

ההתכנסות אינה במ"ש כיוון ש f אינה רציפה, לפי המשפט: אם $f_n \rightrightarrows f$ במידה שווה אז: (א) f_n רציפה לכל n גורר ש f רציפה, (ב) f_n אינטרגבילית לכל n גורר ש f אינטגרבילית וגם $\int f_n \to \int f$.

(4)

נראה כי התנאים האלה יכולים להתקיים גם כאשר f_n אינה מתכנסת במידה שווה.

$\{f_n\}$ סדרת פונקציות אינטגרביליות על $[0,1]$. הגבול f הוא פונקציה אינטגרבילית. אז:

$$\int_0^1 f = 1$$

$$\int_0^1 \frac{n^2x^2}{1+n^2x^2} = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+n^2x^2}\right)dx = 1 - \frac{1}{n}\arctan(nx)\,|_0^1 = 1 - \frac{1}{n}\arctan(n)$$
$$\geq 1 - \frac{\pi}{2n} \to 1$$
$$\int f_n \to 1 = \int f$$

---

(5)

נסתכל על $A \coloneqq \mathbb{Q} \cap [0,1]$. הקבוצה הזו בת-מניה, ונספור אותה:

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$$

נגדיר:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & x = a_1, i \leq i \leq n\} \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

נמצא את הפונקציה הגבולית:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

וזו פונקצית $Direichlet$.

תרגול 08

חדו"א 2

סדרות של פונקציות

גיא רוזנדורן, 01/06/2008 08:07

תוכן עניינים

תקציר משפטים, נוסחאות והדגשים

No table of contents entries found.