

סדרות וטורי פונקציות

הגדרות מההרצאה

תהייה $u_n: E \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציות לכל n טבעי $\sum_n u_n$. *
 אם $x \in E$ כזו שהטור המספרי $\sum_n u_n(x)$ מתכנס, אז נאמר שהטור * מתכנס ב x .
 אם * מתכנס בכל $x \in E$, אז נאמר שהטור מתכנס נקודתית ב E .
 ניתן להגדיר $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$ כסדרת הסכומים החלקיים של הטור.
 את כל תכונות ההתכנסות של הטור * ניתן לנסח באופן שקול כתכונות התכנסות של $\{S_n\}$.
 למשל, הטור $\sum_n u_n$ מתכנס אם ורק אם $\{S_n\}$ מתכנסת:

- ב, א, נקודתית
- על E
- במידה שווה על E

אז $\sum_n u_n$ מתכנס במידה שווה אם ורק אם מתכנס נקודתית לאיזושהי פונקציה S ומתקיים: לכל $\epsilon > 0$ קיים n_0 כך ש: $\forall x \in E, \forall n \geq n_0, |\sum_{k=1}^n u_k(x) - S(x)| < \epsilon$.
 פונקציה $R_N = S - S_N$ נקראת פונקצית השארית ה- N של הטור.
 $\sum_n u_n$ מתכנס נקודתית אם ורק אם $R_N \rightarrow 0$ נקודתית.
 $\sum_n u_n$ מתכנס במידה שווה אם ורק אם $R_N \rightarrow 0$ במידה שווה.

מבחן M של וויירשטראס להתכנסות של טורי פונקציות

אם $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ הוא טור פונקציות, וקיים טור מספרי $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ אשר מתכנס ו $c_n \geq 0$ ומתקיים: $|u_n(x)| \leq c_n$ לכל x בתחום ההגדרה, אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ מתכנס בהחלט ובמידה שווה.

דוגמאות

דוגמא פשוטה, זו סדרה הנדסית. לפי הנוסחה של סדרה הנדסית:

$$= \frac{1}{1-x} \Rightarrow |x| < 1$$

נמצא את הסכומים החלקיים:

$$S_n(x) = \sum_{n=0}^N x^n = \frac{1-x^{N+1}}{1-x}$$

כיוון ש $|x| < 1$ אז בהכרח $x^{N+1} \rightarrow 0$ ולכן $S_n(x) \rightarrow \frac{1}{1-x} = S(x)$, כלומר הטור (1)

מתכנס נקודתית. נבדוק אם הוא מתכנס במידה שווה:

נחשב את פונקצית השארית:

$$R_N = S - S_N = \frac{1}{1-x} - \frac{1-x^{N+1}}{1-x} = \frac{x^{N+1}}{1-x} \stackrel{?}{\rightarrow} 0$$

האם השארית מתכנסת במידה שווה ל-0 לכל x בקטע $E = (-1,1)$?

$$\sup_{x \in E} |R_N| = \infty$$

ולכן אין התכנסות במידה שווה.

נניח ש $0 < a < 1$. נבדוק התכנסות במידה שווה בקטע $E = [-a, a]$:

$$R_N(x) = \frac{x^{N+1}}{1-x}$$

$$\sup_{x \in [-a, a]} |R_n| = \sup_{x \in [-a, a]} \frac{|x|^{N+1}}{1-x} \leq \frac{a^{N+1}}{1-a} \rightarrow_{N \rightarrow \infty} 0$$

ולכן $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ מתכנס במידה שווה בכל קטע סגור $[-a, a]$ כאשר $a \in (0,1)$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^4x^4}$$

נבדוק התכנסות בכמה מקרים:

א. $[0, \infty]$

ב. $x \geq a > 0$

אם $x \neq 0$ אז:

$$\frac{nx}{1+n^4x^4} = \frac{1}{\frac{1}{nx} + n^3x^3} \sim \frac{1}{n^3x^3}$$

נסמן $v_n(x) = \frac{1}{n^3x^3}$ ו- $u_n(x) = \frac{1}{\frac{1}{nx} + n^3x^3}$ אז:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n(x)}{v_n(x)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3x^3}{n^3x^3 + \frac{1}{nx}} = 1$$

ידוע כי $\sum v_n(x) \geq 0$ מתכנס ולכן $\sum u_n(x)$ מתכנס עבור $x > 0$.

עבור $x = 0$ הטור $\sum \frac{nx}{1+n^4x^4} = 0$ כלומר מתכנס לאפס.

ראינו כי הטור מתכנס נקודתית, עכשיו נראה אם הוא מתכנס במידה שווה. (2)

עבור (ב):

$$u_n(x) = \frac{nx}{1+n^4x^4} = \frac{1}{\frac{1}{nx} + n^3x^3} \leq \frac{1}{n^3x^4} \leq \frac{1}{n^3a^3} = c_n$$

$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3a^3}$ הוא טור חיובי מתכנס, לכן לפי מבחן M של ווירשטראס, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ מתכנס במידה שווה.

עבור (א), ננסח טענה:

נניח $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ טור פונקציונאלי אי-שלילי שמתכנס במידה שווה.

אז לכל $\epsilon > 0$ קיים n_0 כך שלכל $n \geq n_0$ מתקיים: $\sup_x u_n(x) < \epsilon$

הוכחה: נסמן $S = \sum u_n$ אז:

$R_{n-1}(x)$ היא סדרה מספרית, והיות והטור מתכנס במ"ש אז $R_{n-1}(x)$ שואף

לאפס כאשר n שואף לאינסוף.

אז לכל $\epsilon > 0$ קיים n_0 כך ש $\forall n \geq n_0, \sup R_{n-1}(x) < \epsilon$.

נחזור למקרה שלנו:

$$u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^4x^4}$$

על מנת שהטור $\sum u_n$ יתכנס במידה שווה, צריך להוכיח $0 \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \geq 0} u_n(x)$, זאת לפי הטענה שהוכחנו. נראה שזה לא נכון:

$$u_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \sup u_n(x) \geq \frac{1}{2} \quad \forall n$$

הוא לא שואף לאפס ולכן הטור לא מתכנס במידה שווה.

תרגיל

תהי $\{f_n\}$ סדרת פונקציות שמתכנסת במידה שווה ל- f על קבוצה E . נראה כי:

$$\sup_{x \in E} f_n(x) \rightarrow \sup_{x \in E} f(x)$$

נניח תחילה כי $M := \sup f < \infty$. נסמן גם $M_n := \sup f_n$. צריך להראות ש $M_n \rightarrow M$.

ידוע כי לכל $\epsilon > 0$ קיים n_0 כך שלכל $n \geq n_0$ וכל x מתקיים $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$. אז:

$$f_n(x) < f(x) + \epsilon$$

$$f_n(x) > f(x) - \epsilon$$

ניקח \sup משני הצדדים: $M_n \leq M + \epsilon$ ו $M_n \geq M - \epsilon$. כלומר, $M_n \rightarrow M$. $\forall n \geq n_0$.

אם $\sup f = +\infty$ אז לכל $L \in \mathbb{R}$ יש x כך ש $f(x) > L$. נראה שהחל מ- n מסוים $\sup f_n = +\infty$.

קיים n_0 כך שלכל $n \geq n_0$ מתקיים $f_n(x) - f(x) > -1$.

הראינו למעשה שלכל L החל מ $n = n_0$ מתקיים: $f_n(x) > L - 1$. ולכן $\sup f_n = +\infty$. $\forall n \geq n_0$.

תרגיל

תהי $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה. נראה ש f אינטגרבילית רימן אם ורק אם לכל $\epsilon > 0$ קיימת פונקציה מדרגה

$$f_-, f_+ \text{, כך ש: } f_- \leq f \leq f_+, \int (f_+ - f_-) < \epsilon.$$

כיוון \Leftarrow : נניח ש f אינטגרבילית. בפרט, לכל $\epsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שאם T חלוקה בעלת פרמטר

$$\lambda(T) < \delta \text{ אז: } \sum_T \omega_{[x_i, x_{i+1}]}(f) \Delta x_i < \epsilon.$$

$$f_+(x) := \sup_{[x_i, x_{i+1}]} f(x) \quad f_-(x) := \inf_{[x_i, x_{i+1}]} f(x)$$

מתקיים: $f_- \leq f \leq f_+$ אז:

$$\int (f_+ - f_-) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sup_{[x_i, x_{i+1}]} f(x) \Delta x_i - \inf_{[x_i, x_{i+1}]} f(x) \Delta x_i \right) = \sum_T \omega_{[x_i, x_{i+1}]}(f) \Delta x_i < \epsilon$$

כיוון \Rightarrow : נניח שהתנאי מתקיים. נוכיח כי f אינטגרבילית. יהי $\epsilon > 0$. צריך למצוא $\lambda > 0$ כך שאם T בעלת

$$\lambda(T) < \lambda \text{ אז: } \sum_T \omega_i(f) \Delta x_i < \epsilon.$$

עובדה: מספיק לכל חלוקה T בעלת פרמטר $\lambda(T) < \delta$ להציע על עידון $T' \supseteq T$ שעבורו הנ"ל מתקיים. אז

קיימות f_+, f_- פונקציות מדרגה: $f_- \leq f \leq f_+$. קיימות חלוקות T_-, T_+ כך שבכל קטע f

קבועה. נסמן $T_0 = T_+ \cup T_-$. אז בכל קטע של T_0 , f_+, f_- קבועות. נסמן $\delta = \frac{\lambda(T_0)}{2}$. אם T חלוקה עם

$\lambda(T) < \delta$ אז נגדיר $T' = T \cup T_0$ כך ש $T' \supseteq T$. אז:

$$\sum_T \omega_i(f) \Delta x_i \leq \sum (f_+ - f_-) \Delta x_i = \int (f_+ - f_-)$$

תרגיל

הוכח:

$$I_{m,n} := \int_0^1 x^m (1-x)^n dx = \frac{m! n!}{(m+n+1)!}$$

פתרון:

$$I_{m,n} = \int_0^1 x^m (1-x)^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} (1-x)^n \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{m+1}}{m+1} n(1-x)^{n-1} dx = \frac{n}{m+1} I_{m+1, n-1}$$

$$I_{m,n} = \frac{n}{m+1} I_{m+1, n-1} = \frac{n}{m+1} \frac{n-1}{m+2} I_{m+2, n-2} = \dots = \frac{n}{n+1} \frac{n-1}{m+2} * \dots * \frac{1}{m+n} * I_{m+n, 0}$$

$$I_{m,0} = \int_0^1 x^m dx = \frac{1}{m+1}$$

$$I_{m,n} = \frac{n!}{(m+1) * \dots * (m+n+1)} = \frac{m! n!}{(m+n+1)!}$$

תוכן עניינים

1..... סדרות וטורי פונקציות

תקציר משפטים, נוסחאות והדגשים

No table of contents entries found.