תרגול 10

חדו"א 2

[Comments]

גיא רוזנדורן, 10/06/2008 12:14

סדרות וטורי פונקציות

שאלה d5 מתרגיל בית 5

צריך להוכיח:

$$\frac{\sin\theta}{\theta} = \prod_{k=1}^{\infty} \cos\frac{\theta}{2^k}$$

פתרון:

$$\frac{sin\theta}{\theta} = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\theta} = \frac{4\sin\frac{\theta}{4}\cos\frac{\theta}{4}\cos\frac{\theta}{2}}{\theta} = \cdots = \frac{2^n \sin\frac{\theta}{2^n} cos\frac{\theta}{2^n} cos\frac{\theta}{2^{n-1}} * \dots * \cos\frac{\theta}{2}}{\theta}$$

נסמן:

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} \cos\frac{\theta}{2^k}$$

אז:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\theta}{2^n \sin\frac{\theta}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)} = 1$$

$$P_n = \frac{\sin\theta}{\theta} 2^n \sin\frac{\theta}{2^n} \to_{n\to\infty} \frac{\sin\theta}{\theta}$$

טורי חזקות

הגדרה

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

תכונות

קיים מספר (מכולל) $R \in [0, +\infty]$ כך שטור החזקות מתכנס לכל $|x| < R$ ומתבדר לכל $|x| > R$.

R נקרא רדיוס ההתכנסות.

נוסחת Cauchjy-Hadamard לרדיו ההתכנסות:

$$\frac{1}{R} = \text{limsup}_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$$

אם הטור בעל רדיוס התכנסות $R > 0$, אז לכל $0 < A < R$ הטור מתכנס במידה שווה על $[-A, A]$.

אם הטור בעל רדיוס $R > 0$, אז גם הטורים $\sum n a_n x^{n-1}$ ו $\frac{\sum a_n}{n+1} x^{n+1}$ בעלי אותו רדיוס התכנסות R, ומתקיים:

$\sum n a_n x^{n-1}$ מתכנס לנגזרת של הסכום של הטור המקורי.

ניתן לגזור איבר-איבר ולעשות אינטגרציה איבר-איבר.

תרגול 10

חדו"א 2

[Comments]

גיא רוזנדורן, 10/06/2008 12:14

תרגיל

יש למצוא את רדיוס ההתכנסות של הטורים הבאים:

(1)

$$a_n = \frac{n!}{n^n}$$

$$\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n!}{n^n}\right|^{\frac{1}{n}} =^{1} \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}\right)^{\frac{1}{n}}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\frac{1}{e}}{n} = \frac{1}{e}$$

לכן רדיוס ההתכנסות הוא $R = \frac{1}{1/e} = e$.

---

(2)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha} x^n$$

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^\alpha}\right)^{\frac{1}{n}} = 1$$

$$R = 1$$

---

(3)

צריך להיות ידוע ש: $\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right] = \gamma$. נשתמש בזה:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{\ln n} = 1$$

$$R = \lim_{n\to\infty} |c_n|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} (\ln n)^{\frac{1}{n}} = 1$$

כי $\ln n < n$ ולכן $(\ln n)^{\frac{1}{n}} < \mathrm{n}^{\frac{1}{\mathrm{n}}} = 1$.

---

(4)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$$

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n!)^2}{(2n)!}\right)^{\frac{1}{n}}$$

ושוב לפי סטירלינג:

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2\pi n\, n^{2n} e^{-2n}}{\sqrt{4\pi n}\,(2n)^{2n}\, e^{-2n}}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{4n^2} = \frac{1}{4}$$

$$R = 4$$

---

[1] נשתמש בנוסחת סטירלינג עבור n!

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^{n!}$$

$$\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = ?$$

נשים לב ש:

$$a_n = \begin{Bmatrix} n, & n = k! \\ 0 & \text{אחרת} \end{Bmatrix}$$

(5) אז נדלג על כל האיברים שהם אפסים:

$$\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \limsup_{k\to\infty} |a_{k!}|^{\frac{1}{k!}} = \lim_{k\to\infty} (k!)^{\frac{1}{k!}} = 1$$

$$R = 1$$

הטריק הזה עובר לכל סדרה עולה:

$$\sum_{n=0}^{\infty} m_k a^{m_k}$$

נוסחת סטירלינג

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}} = 1$$

טורי טיילור

נניח $f: (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}$ פונקציה גזירה ∞ פעמים. אז לכל $n \in \mathbb{N}$:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x)$$

כאשר R_n מקיימת:

$$\lim_{x\to 0} \frac{R_n(x)}{x^n} = 0$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

אז מכל פונקציה גזירה ∞ פעמים מקבלים טור חזקות:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

דוגמא

נראה שישנן פונקציות שיש להן טור טיילור, אבל הטור מתכנס לפונקציה רק בנקודה אחת:

$$f(x) = \begin{Bmatrix} 0 & x = 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \end{Bmatrix}$$

F גזירה ∞ פעמים. אפשר להראות ש $f^{(k)}(0) = 0$ לכל k לכן טור טיילור המתאים הוא 0.

מינוח

תרגול 10

חדו"א 2

[Comments]

גיא רוזנדורך, 10/06/2008 12:14

מינוח

אם f גזירה ∞ פעמים וטור טיילור שלה מתכנס אליה בסביבה של נקודה a אז נאמר כי f אנליטית ב a.
כל הפונקציות האלמנטאריות הן אנליטיות בתחום הגדרתן.

תרגיל

להוכיח כי עבור $|x| < 1$:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \mp \cdots$$

פתרון:

$$\frac{1}{1+q} = \sum_{n=0}^{\infty} (-q)^n$$

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n dt = {}^{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

תרגיל

צריך להוכיח כי לכל $x \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^x e^{-t^2} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

נשתמש בפיתוח טיילור עבור e^x:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\int_0^x e^\wedge - t^2 dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t^2)^n}{n!} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-1)^n \int_0^x t^2 dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

[2] אינטגרציה איבר-איבר

תרגול 10

חדו"א 2

[Comments]

גיא רוזנדורן, 10/06/2008 12:14

תרגיל

למצוא פיתוח טיילור עבור:

$$e^x \sin x \ = ?$$

$$(e^x \sin x)' = e^x(\cos x + \sin x)$$

$$(e^x \sin x)'' = e^x(\cos x + \sin x - \sin x + \cos x) = 2e^x \cos x$$

$$(e^x \sin x)''' = 2e^x(\cos x - \sin x)$$

$$(e^x \sin x)^{(4)} = 2e^x(\cos x - \sin x - \sin x - \cos x) \ = -4e^x \sin x$$

$$f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = 2, f'''(0) = 2, f''''(0) = 0$$

$$f^{(k)}(0) = \begin{Bmatrix} 0 & 4|k \\ 1(-4)\frac{k-1}{4} & 4|k-1 \\ 2(-4)\frac{k-2}{4} & 4|k-2 \\ 2(-4)\frac{k-3}{4} & 4|k-3 \end{Bmatrix} \tag{1}$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

$$\sin^2 x \ =?$$

$$\cos x \ = \sum_{n-0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} 2^{2n} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!} 2^{2n-1} x^{2n} \tag{2}$$

$$= x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{45}x^6 + \cdots$$

$$\ln \cos x = ?$$

$$(\ln \cos x)' = -\tan x$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \tan^2 x + 1$$

$$(\tan x)'' = 2\tan x(\tan^2 x + 1) = 2\tan^3 x + 2\tan x$$

$$(\tan x)''' = 6\tan^2 x\,(\tan^2 x + 1) + 2(\tan^2 x + 1) = 6\tan^4 x + 8\tan^2 x + 2$$

$$(\tan x)^{(n)} = P_n(\tan x) \tag{3}$$

פולינום ממעלה $n+1$, נמצא נוסחה רקורסיבית.

$$(\tan x)^{(n+1)}(x) = \left((\tan x)^{(n)}\right)' = \left(P_n(\tan x)\right)' = P_n'(\tan x)(\tan^2 x + 1)$$

$$= P_{n+1}(\tan x)$$

$$P_{n+1}(Z) = P_n'(Z)(Z^2 + 1)$$

$$\tan x = x + \frac{2x^3}{3!} + \cdots \frac{P_{n+1}(0)}{n!} x^n$$

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \tag{4}$$

$$\frac{x}{(1-x)(1-x^2)}$$

$$\frac{x}{(1-x)(1-x)^2} = \frac{x}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{1}{4}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{4}\frac{1}{x+1}$$

$$= \frac{a(x-1)(x+1) + b(x+1) + c(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)}$$

$$1 = 2b \Rightarrow b = \frac{1}{2}$$

$$-1 = 4c \Rightarrow c = -\frac{1}{4}$$

$$0 = a + c \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = \frac{x}{(1-x)(1-x^2)} \tag{5}$$

$$= -\frac{1}{4}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{4}\frac{1}{x+1} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{(x-1)^2}$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{(-1)^n + 1}{2}$$

$$\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{2}x^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n(n+2-(-1)^n)}{2}$$

מכפלה של טורי חזקות

הגדרה

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n * \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_n b_{n-k}$$

תרגול 10

חדו"א 2

[Comments]

גיא רוזנדורן, 12:14 10/06/2008

דוגמא

נמצא את טור טיילור סביב 0 של: $f(x) = \ln^2(1-x)$.

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots = -\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \quad a_n = \frac{1}{n}, a_0 = 0$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n\right)^2 = \sum_{n=2}^{\infty} b_n x^n$$

$$b_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\frac{1}{n-k}$$

$$\frac{1}{k}\frac{1}{n-k} = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k}\right)$$

$$b_n = \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k}\right) = \frac{2}{n}\sum_{1}^{n}\frac{1}{k}$$