שיעור אחרון

אלגברה ליניארית 2

[Comments]

גיא רוזנדורן, 17/07/2008 08:16

מה במבחן?

4 שאלות מתוך 5

2 "משפטים" – דברים שהיו בהרצאה

3 "תרגילים".

שניוניות לא יהיה.

תרגילים

תרגיל 1

יהי V מרחב וקטורי מעל F ממימד סופי.

תהי $T: V \to V$ העתקה ליניארית, ויהי $m_T = x^2 - 4$ ויהי $p(x) = x^2 - 5x + 4 \in F[x]$.

א. האם $p(T)$ הפיכה?

ב. הראם $p(T)$ אינה הפיכה?

ג. תלוי ב T, V?

פתרון:

$m_T = (x-2)(x+2)$, ו-0 אינו שורש, לכן T הפיכה.

לפי שהפולינום המינימאלי מתפרק לגורמים ליניאריים, לכן יש בסיס B כך שהמטריצה של T לפי B אלכסונית: $A = [T]_B$ והערכים העצמיים באלכסון:

$$A = [T]_B = \begin{pmatrix} \pm 2 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \pm 2 \end{pmatrix}$$

נציב $P(A)$:

$$p(A) = \begin{pmatrix} p(\pm 2) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & p(\pm 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}, \lambda_i \neq 0 \text{ לכל } i$$

לכן, $p(A)$ הפיכה, אבל $[p(T)]_B = p(A)$ ולכן $p(T)$ הפיכה.

אפשר גם באופן הבא:

$$p(A) = (A-4I)(A-I)$$
$$|p(A)| = |A-4I| * |A-1|$$

$|A-4I| \neq 0$ כי 4 אינו שורש של m_T ולכן אינו ערך עצמי של A (= של T).

$|A-I| \neq 0$ - כנ"ל. לכן $P(A)$ הפיכה.

פתרון נוסף:

$$p(x) = (x-4)(x-1), m_t = (x-2)(x+2)$$

לכן יש $g, h \in F[x]$ כך ש $1 = gp + hm_t$. מכאן $1_V = g(T)p(T) + h(T)m_T(T) = g(T)p(T)$. אם הרכבה של העתקות היא העתקת הזהות, אז ההעתקות הפיכות, ולכן $p(T)$ הפיכה.

שיעור אחרון

אלגברה ליניארית 2

[Comments]

גיא רוזנדורן, 08:16 17/07/2008

תרגיל 2

מהם f_A, m_A אם $A \in M_n(\mathbb{R})$, A אינה הפיכה, $\operatorname{tr}(A) \neq 0$ ו $A^3 = A$?

פתרון:

A אינה הפיכה ולכן 0 הוא ערך עצמי של A. וגם: $A^3 - A = 0 \Leftrightarrow A^3 = A$ ולכן A מאפסת את $x^3 - x$:

$$x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x-1)(x+1)$$

לכן הפולינום המזערי מחלק את הפולינום שמצאנו: $m_T | x(x-1)(x+1)$. נבדוק מהו בדיוק הפולינום המינימאלי. נרשום את כל האפשרויות:

$$\cancel{m_T = x(x-1)(x+1), m_T = (x-1)(x+1), m_T = x, m_T = x-1, m_T = x+1}$$

$$m_T = x(x-1)$$

$$m_T = x(x+1)$$

. ידוע גם ש D. בגלל ש-0 ערך עצמי, הוא יופיע באלכסון של D דומה למטריצה אלכסוניתAבכל מקרה, יכולה להיות:D אינו אפס. לכן D). לכן סכום האיברים על באלכסון של $f_A = f_D$ (כי $\operatorname{tr}(D) = \operatorname{tr}(A)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow m_A = m_D = x(x-1) \Rightarrow f_A = x(x-1)^2$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow m_A = x(x+1) \Rightarrow f_A = x(x+1)^2$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow m_A = x(x-1) \Rightarrow f_A = x^2(x-1)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow m_A = x(x+1) \Rightarrow f_A = x^2(x+1)$$

יש 4 אפשרויות טובות, צריך לבחור אחת.

תרגיל 3

א. הוכח ש $\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(A^\star B)$ היא מכפלה פנימית על $V = M_n(\mathbb{C})$.

ב. תהי מטריצה $M \in M_n(\mathbb{C})$. הוכח שיש מטריצה אחרת $N \in M_n(\mathbb{C})$ כך שאם $T: V \to V$ הנתונה ע"י $T(A) = M * A$ אז $T^\star: V \to V$ הנתונה ע"י $T^\star(A) = N * A$. מצא את M.

פתרון:

א. נראה שהתכונות של מכפלה פנימית מתקיימת:

$$\langle A, B_1 + B_2 \rangle = \operatorname{tr}\left(A^\star(B_1 + B_2)\right) = \operatorname{tr}(A^\star B_1 + A^\star B_2) = \operatorname{tr}(A^\star B_1) + \operatorname{tr}(A^\star B_2) = \langle A, B_1 \rangle + \langle A_1, B_2 \rangle$$

$$\langle A, \alpha B \rangle = \operatorname{tr}(A^\star \alpha B) = \operatorname{tr}(\alpha A^\star B) = \alpha * \operatorname{tr}(A^\star B) = a \langle A, B \rangle$$

$$\overline{\langle A, B \rangle} = \overline{\operatorname{tr}(A, B)} = \overline{\operatorname{tr}((B^\star A)^\star)} = \operatorname{tr}(B^\star A) = \langle B, A \rangle$$

$$A \neq 0 \Rightarrow \langle A, A \rangle = \operatorname{tr}(A^\star A) = \sum_{i=1}^{n} (A^\star A)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (A^\star)_{ij} (A)_{ji} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j-1}^{n} \overline{(A)}_{ji} (A)_{ji} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left|(A)_{ij}\right|^2 > 0$$

כי $\left|(A)_{ji}\right| \geq 0$ ויש i, j כך ש $\left|(A)_{ji}\right| \neq 0$.

ב. לכל B $T^\star(B)$ מוגדרת ע"י $\langle T(A), B \rangle = \langle A, T^\star(B) \rangle$ לכל A. הצד השמאלי שווה ל $\langle MA, B \rangle$ ומחפשים את השוויון הבא:$\langle MA, B \rangle = \langle A, NB \rangle$, כלומר האם $\operatorname{tr}((MA)^\star B) = \operatorname{tr}\left(A^\star(NB)\right)$ לכל A,B.

כלומר האם $\operatorname{tr}(A^\star M^\star B) = \operatorname{tr}(A^\star NB)$ לכל B,A? נגדיר $N = M^\star$ וזה מתקיים.

שיעור אחרון

אלגברה ליניארית 2

[Comments]

גיא רוזנדורן, 08:16 17/07/2008

תרגיל 4

איזה מבין המטריצות הבאות לכסינות?

א.

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2&3&5\\0&4&1&0&1\\2&1&2&3&8\\3&0&3&1&1\\5&1&8&1&1\end{pmatrix}\in M_5(\mathbb{R})$$

המטריצה סימטרית לכן יש $P\in M_n(\mathbb{R})$ (אורתוגונאלית) כך ש $P^{-1}AP=P^tAP$ אלכסונית.

ב.

$$B=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\2&i&0&0&0\\0&1&\pi&0&0\\3&0&1&e&0\\8&7&1&6&1+i\end{pmatrix}\in M_5(\mathbb{C})$$

$$f_B(x)=(x-1)(x-i)(x-\pi)(x-e)(x-1-i)$$

הפולינום האופייני הוא מכפלה של גורמים ליניאריים שונים, לכן B לכסינה (וזה גם הפולינום המינימאלי שלה כי הריבוי האלגברי של כל הערכים העצמיים הוא 1).

ג.

$$C=\begin{pmatrix}\begin{matrix}2&1\\0&2\end{matrix}&0&0\\0&2&0\\0&0&\begin{matrix}2&1\\0&2\end{matrix}\end{pmatrix}\in M_n(\mathbb{C})$$

זאת לא מטריצת ז'ורדן, כי ה- 1ים צריכים לבוא מתחת לאלכסון הראשי, ובמטריצות הבלוקים של כל עצמי צורות לבוא לפי הסדר של הגדלים. היות והמטריצה מעל המרוכבים, המטריצה דומה ל C^t (משפט).

לכן, C צמודה ל:

$$C^t=\begin{pmatrix}\begin{matrix}2&0\\1&2\end{matrix}&0&0\\0&2&0\\0&0&\begin{matrix}2&0\\1&2\end{matrix}\end{pmatrix}$$

כמו כן, C^t דומה למטריצה הבאה (הסבר אח"כ)

$$J=\begin{pmatrix}\begin{matrix}2&0\\1&2\end{matrix}&0&0\\0&\begin{matrix}2&0\\1&2\end{matrix}&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

זאת מטריצה מצורת זו'רדן, והיא יחידה עד כדי סדר הבלוקים, והיא אינה לכסינה (אחרת מטריצת ז'ורדן שלה הייתה מטריצה אלכסונית, אבל מטריצת ז'ורדן שלה היא J – סתירה).

טענה: אם $A\in M_m(F),B\in M_n(F)$ מטריצות ריבועיות, אז $\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix},\begin{pmatrix}B&0\\0&A\end{pmatrix}$ דומות.

הוכחה: יש מרחב וקטורי V ובסיס B שלו. ישנה העתקה $T:V\to V$ כך ש $[T]_B^B=\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}$.

נניח ש $B=(u_1,\dots,u_m,v_1,\dots,v_n)$. אז גם $C=(v_1,\dots,v_n,u_1,\dots,u_n)$ בסיס. אז $[T]_C^C=\begin{pmatrix}B&0\\0&A\end{pmatrix}$.

שיעור אחרון

אלגברה ליניארית 2

[Comments]

גיא רוזנדורן, 17/07/2008 08:16

תרגיל 5

תהי מטריצה A כאשר $a_{21}, a_{32}, \dots, a_{n,n-1} \neq 0$. הראה שיש גוש ז'ורדן אחד לכל ערך עצמי של A.

$$A = \begin{pmatrix} \star & \star & \star & \star \\ a_{21} & \star & \star & \star \\ 0 & \ddots & \star & \star \\ 0 & 0 & a_{n,n-1} & \star \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C})$$

פתרון:

$$f_A(x) = (x - \lambda_1)^{n_1} * \dots * (x - \lambda_r)^{n_r}$$
$$m_A(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} * \dots * (x - \lambda_r)^{m_r}$$

לכל i יש גוש ז'ורדן (ראשון, מהסדר הגדול ביותר) מסדר m_i וסכום הסדרים של הגושים המתאימים ל- λ_i הוא n_i. לכן לכל i יש רק גוש אחד אם ורק אם $m_i = n_i$, וזה מתקיים כאשר $m_A = f_A$. בעצם, צריך להוכיח ש $m_A = f_A$.

A מייצגת את ההעתקה $T(v) = Av$ לפי הבסיס הסטנדרטי ($T: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$).

כך ש $[T]_A^A = C(p)$ כאשר C המטריצה הנלווית ואז $f_c = m_c = p$.

C דומה ל A, לכן $f_A = m_A = p$.

לפי טענה מהשיעור: $Z(e_1, T) = V = \mathbb{C}^n$. אכן, $e_1 \in Z$ ו $T(e_1) \in Z = a_{11}e_1 + a_{21}e_2$ ומכאן יוצא ש $a_{21}e_2 \in Z$ ולכן $e_2 \in Z$. מכאן מראים שכל הבסיס הסטנדרטי שייך ל Z ולכן הוא כל המחרב.