שיעור 20

מבוא להסתברות

[Comments]

גיא רוזנדורן, 09/07/2008 14:14

הוכחת הנוסחאות

$$E(Y|X=x)=\sum_j y_j P_{Y|X}\left(y_j|x_i\right)$$

$$E[E(Y|X)]=\sum_i E(Y|X=x_i)\,P_X(x_i)=\sum_i\left[\sum_j y_j P_{Y|X}\left(y_j|x_i\right)\right]P_x(x_i)==\sum_{i,j} y_j P_{Y|X}\left(y_j x_i\right)P_X(x_i)$$

$$=\sum_{i,j} y_j P_{X,Y}(x_i,y_j)=\sum_j y_j\left[\sum_i P_{X,Y}(x_i,y_j)\right]=\sum_j y_j P_Y(y_j)=E(Y)$$

$$V(Y)=E\big(Y-E(Y)\big)^2$$

$$Y-E(Y)=Y-E(Y|X)+E(Y|X)-E(Y)$$

$$[Y-E(Y)]^2=[Y-E(Y|X)]^2+[E(Y|X)-E(Y)]^2+2[Y-E(Y|X)][E(Y|X)-E(Y)]$$

$$E\left[\big(Y-E(Y|X)\big)^2\right]=E\left\{E\left[\big(Y-E(Y|X)\big)^2\middle|X\right]\right\}=E[V(Y|X)]$$

$$E\{[E(Y|X)-E(Y)]^2\}=V[E(Y|X)]$$

$$E\left\{\underbrace{[Y-E(Y|X)][E(Y|X)-E(Y)]}_{W}\right\}$$

$$E(W)=E[E(W|X)]$$

כאשר X דיוע הביטוי $[E(Y|X)-E(Y)]$ זה גודל קבוע וכמו כן $E[Y-E(Y|X)|X]=E(Y|X)-E(Y|X)=0$.
מכל החישוב מקבלים כי:

דוגמאות

נתונים זוג משתנים מקריים X,Y, וידוע כי $X\sim P(\lambda)$ ו $Y|X\sim B(X,p)$. חשבו את $E(Y),V(Y),\rho(X,Y)$.
השאלה הזו דומה לבעיית מאיץ החלקיקים שדיברנו עליה בעבר (עמוד 65).
לא נחשב את ההתפלגות של Y, נשתמש בנוסחאות החדשות. לפי הנתונים:

$$E(Y|X)=Xp$$

$$V(Y|X)=Xp(1-p)$$

$$E(X)=\lambda=V(X)$$

$$E(Y)=E[E(Y|X)]=E[pX]=pE(X)=p\lambda$$

$$V(Y)=E[V(Y|X)]+V[E(Y|X)]=E[xp(1-p)]+V[pX]=$$

$$=p(1-p)E(X)+p^2V(X)=p(1-p)\lambda+p^2\lambda=\lambda p$$

$$\rho(X,Y)=\frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$$

$$\mathrm{cov}(X,Y)=E(X*Y)-E(X)E(Y)$$

$$E(X*Y)=E[E(X*Y|X)]=E[X*E(Y|X)]=E[XpX]$$

$$COV(X,Y)=pE(X^2)-E(X)pE(X)=p\big[E(X^2)-E(X)\big)^2\big]=pV(X)=p\lambda$$

$$COV(X,Y)=pE(X^2)-E(X)pE(X)=p\big[E(X^2)-E(X)\big)^2\big]=pV(X)=p\lambda$$

$$\rho(X,Y)=\frac{p\lambda}{\sqrt{\lambda p\lambda}}=\frac{p}{\sqrt{p}}=\sqrt{p}$$

אם $p=0$ אז בעצם מגלים 0 חלקיקים ולכן $Y=0$ (גודל קבוע) ולכן מקדם המתאם ביניהם 0.

אם $p=1$ אז מתגלה חלקיק 1 ולכן $Y=X$ ולכן הקשר ביניהם הוא ליניארי.

התפלגויות רציפות

משתנים מקריים רציפים

דוגמא

בגלגל רולטה יש n גזרות על גלגל הרולטה, ואם גלגל הרולטה סימטרי אזי הסיכוי שמחוג ייעצר בגזרה מסוימת הוא $1/n$. בגלגל רולטה רציף מקום עצירת המחוג X זה משתנה מקרי שיכול לקבל כל נקודה על היקף המעגל. אם נייצג נקודות על המעגל בעזרת זוויות (ברדיאנים), X יכול לקבל כל ערך ב $[0,2\pi)$. הנחת הסימטריה אומרת כי הסיכוי שהמחוג ייעצר באיזושהי גזרה תלוי באורך הגזרה (יחסית להיקף המעגל) אך לא במיקומה. למשל:

$$P\left(0\le X\le \frac{\pi}{2}\right)=P\left(\pi\le X\le \frac{3}{2}\pi\right)=\frac{\frac{\pi}{2}}{2\pi}=\frac{1}{4}$$

באופן כללי, נקבל ההסתברות ש X ייפול בגזרה a,b כאשר $0\le a\le b<2\pi$:

$$P(a\le X\le b)=\frac{b-a}{2\pi}$$

לכן:

- מדברים על הסתברויות של קטעים, ובעצם לכל יחידת אורך על המעגל יש תרומה $\frac{1}{2\pi}$ להסתברות.
- ההסתברות שהמחוג ייעצר בדיוק בנקודה a הוא 0. ההסתברות מאופיינת ע"י העובדה שלכל יחידת אורך יש תרומה של $\frac{1}{2\pi}$ להסתברות. כלומר, צפיפות ההסתברות $f(x)$ היא

$$f(x)=\begin{Bmatrix}\frac{1}{2\pi} & 0\le x<2k\\ 0 & \text{אחרת}\end{Bmatrix}$$

פונקצית צפיפות של משתנה מקרי רציף

יהי X משתנה מקרי רציף. פונקצית הצפיפות של X, $f(x)$ מקיימת את התכונות הבאות:

א. $f(x)\ge 0$ לכל $-\infty<x<\infty$.

ב. השטח הכולל מתחת לפונקצית הצפיפות הוא 1, כלומר $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=1$.

ג. השטח תחת לפונקצית הצפיפות ומעל קטע A הוא $P(X\in A)=\int_A f(x)dx$.

השוואה בין משתנה מקרי בדיד ומשתנה מקרי רציף

משתנה מקרי בדיד מקבל סדרת ערכים, ומשתנה מקרי רציף מקבל רצף של ערכים.

משתנה מקרי בדיד מאופיין ע"י פונקצית הסתברות $P(X_i)$ המקיימת: $P(X_i)\ge 0, \sum_i P(X_i)=1$.

משתנה מקרי רציף מאופיין ע"י פונקצית צפיפות המקיים: $f(X)\ge 0, \int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=1$.

ההסתברות שהמשתנה המקרי הבדיד יקבל ערכים בתחום A, כלומר $P(X\in A)=\sum_{X_i\in A}P(X_i)$.

ההסתברות שהמשתנה המקרי הרציף יקבל ערכים בתחום A, כלומר $P(X\in A)=\int_A f(x)dx$.

הערה

במקרה הבדיד: $E(X)=\sum_i x_i P(X_i)$

במקרה הרציף: $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx$.

שיעור 20

מבוא להסתברות
[Comments]
גיא רוזנדורך, 09/07/2008 14:14

דוגמאות פשוטות

התפלגות אחידה

התפלגות אחידה בקטע (a, b):

$$X \sim U(a,b) \Rightarrow f(x) = \begin{Bmatrix} \frac{1}{b-a} & a \le x \le b \\ 0 & \text{אחרת} \end{Bmatrix}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_a^b x * \frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b xdx = \frac{1}{b-a} * \frac{x^2}{2}|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

וזאת התוחלת של משתנה מקרי בדיד המתפלג התפלגות אחידה.

התפלגות מעריכות

$$X \sim \exp(\theta) \Rightarrow f(x) = \begin{Bmatrix} \theta e^{-\theta x} & x \ge 0 \\ 0 & \text{אחרת} \end{Bmatrix}$$

נבדוק את השטח מתחת לצפיפות, ונבדוק שהוא 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^{\infty} \theta e^{-\theta x}dx = -e^{-\theta x}|_0^{\infty} = 1$$

תכונת חוסת הזיכרון

$$P(X > s|t|X > s) = P(X > t)$$