

תרגול 10

אלגברה ליניארית 2

[Comments]

גיא רוזנדורן, 09/07/2008 08:09

מרחבי מכפלה פנימית

הערה

למה בסיס אורתונורמלי חשוב?

נניח $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ בסיס אורתונורמלי למרחב וקטורי V מעל \mathbb{C} עם מכפלה פנימית. אז

$$[v]_B = \begin{pmatrix} \langle u_1, v \rangle \\ \langle u_2, v \rangle \\ \vdots \\ \langle u_n, v \rangle \end{pmatrix}$$

למשל: $([T]_B)_{ij} = \langle u_i, Tu_j \rangle$.

זהויות חשובות

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle u, v \rangle + \|v\|^2$$

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$$

$$\text{over } \mathbb{R}: \langle u, v \rangle = \frac{1}{2}(\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2)$$

$$\text{over } \mathbb{C}: \langle u, v \rangle = \frac{1}{4}(\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2 + 2\|u + 2v\|^2 - 2\|u - 2v\|^2)$$

המשלים האורתוגונאלי

הגדרה

יהי מרחב וקטורי V עם מכפלה פנימית, ויהי $U \subseteq V$ תת-מרחב. המשלים האורתוגונאלי הוא:

$$U^\perp = \{v \in V \mid \langle v, u \rangle = 0 \forall u \in U\}$$

או במילים אחרות, כל הווקטורים במרחב שניצבים לכל ווקטור בתת-מרחב U .

דוגמה

$$U^\perp = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \text{ או } U = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \text{ יהי } V = \mathbb{R}^3 \text{ עם המכפלה הסטנדרטית.}$$

$$\forall x, y: \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a = 0, b = 0$$

עובדה שימושית

אם K קבוצה פורשת את U אז המשלים האורתוגונאלי הוא: $U^\perp = \{v \in V \mid \forall u \in K: v \perp u\}$

תרגיל

יהי $V = \mathbb{R}^3$ עם המכפלה הסטנדרטית. יהי תת-מרחב $W = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \subseteq V$. מצאו את W^\perp .

נשתמש בנוסחה הבאה:

$$W^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid v \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge v \perp \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid \begin{cases} x + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

פותרים את מערכת המשוואות ומקבלים: $W^\perp = \operatorname{span}\{(-1, -1, 1)\}$.

תרגיל

מצאו את ההיטל אם $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ על $W = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

בשיעור למדנו ש $V = W \oplus W^\perp$, $v \in W$ או $v \in W^\perp$. $pr_W v \in W$ ו- $pr_{W^\perp} v \in W^\perp$.

ניקח $\{w_1, w_2\}$ להיות בסיס אורתונורמאלי ל- W . לפי תרגיל קודם, הבסיס למשלים האורתוגונאלי הוא

$$w_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ננרמל את } w_3 \text{ לאורך 1 ונקבל: } w_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

היות ו $V = W \oplus W^\perp$ אז ל v יש הצגה לפי הווקטורים שפורסים את w_1, w_2, w_3 :

$$v = \underbrace{\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2}_{pr_W v} + \underbrace{\alpha_3 w_3}_{\in W^\perp}$$

$$pr_W v = v - \alpha_3 w_3$$

בגלל שזהו בסיס אורתונורמאלי, אז לפי נוסחת הקואורדינאטות הבסיס מתחילת התרגול:

$$\alpha_3 = \langle w_3, v \rangle = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

↓

$$pr_W v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

העתקה הצמודה

היו שני מרחבים ווקטורים V, W עם מכפלה פנימית, ותהי העתקה $T: V \rightarrow W$

משפט

קיימת העתקה יחידה $T^*: W \rightarrow V$ כך שלכל $v \in V, w \in W$ מתקיים: $\langle Tv, w \rangle_W = \langle v, T^*w \rangle_V$.
העתקה זו נקראת ההעתקה הצמודה.

למה

אם B_1, B_2 בסיסים אורתונורמאליים של V, W בהתאמה, אז: $[T^*]_{B_1}^{B_2} = ([T]_{B_2}^{B_1})^*$, $A^* = \overline{A^t}$.

מסקנה

הדרגה של T שווה לדרגה של T^* : $\text{rank}(T) = \text{rank}(T^*) = \dim \text{Im } T$.

בפרט, אם $\dim V = \dim W$ אז גם $\dim \ker T = \dim \ker T^*$.

דוגמה

יהי $V = \mathbb{R}^2$ עם מכפלה פנימי שבה הבסיס $\{(1, -2), (1, 1)\}$ הוא אורתונורמאלי: $\langle [v]_B, [u]_B \rangle_{st} := \langle v, u \rangle$.

נתון אופרטור $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ -x \end{pmatrix}$. יש למצוא את האופרטור הצמוד שלו. נחשב את T^* :

$$[T]_B = ([Tb_1]_B, [Tb_2]_B) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow [T^*]_B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$[T^*]_E = [E]_B^{-1} [T^*]_B [E]_B \Rightarrow [E]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow [T^*]_E = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 13 & -1 \\ -29 & -4 \end{pmatrix}$$

¹ ההיטל - projection

תכונות הצמוד

$$\begin{aligned} (T + S)^* &= T^* + S^* \\ (\lambda T)^* &= \overline{\lambda} T^* \\ (ST)^* &= T^* S^* \\ (T^{-1})^* &= (T^*)^{-1} \\ (T^*)^* &= T \end{aligned}$$

חשוב לזכור

$$\langle \lambda u, v \rangle = \overline{\langle v, \lambda u \rangle} = \overline{\lambda \langle v, u \rangle} = \overline{\lambda} \overline{\langle v, u \rangle} = \overline{\lambda} \langle u, v \rangle$$

תרגיל

יהי $V = M_n(F)$ עם המכפלה הפנימית $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^* B)$.
נגדיר אופרטור $T: V \rightarrow V$ באופן הבא: $T(A) = M^* A M$, $M \in M_n(F)$. יש למצוא את T^* .

לכל A, B , לפי ההגדרה:

$$\begin{aligned} \langle A, T^* B \rangle &= \langle T A, B \rangle = \langle M^* A M, B \rangle = \text{tr}((M^* A M)^* B) = \text{tr} \left(\underbrace{M^*}_{D'} \underbrace{A^* M B}_{D} \right) = \text{tr}(D D') = \text{tr}(A^* M B M^*) \\ &= \langle A, M B M^* \rangle \Rightarrow T^*(A) = M A M^* \end{aligned}$$

הגדרה

T נקרא צמוד לעצמו אם $T = T^*$.

תרגיל

נניח S, T העתקות צמודות לעצמן (מעל \mathbb{C}). הוכיחו כי גם $TS + ST, i(TS - ST)$ צמודות לעצמן.

$$\begin{aligned} (TS + ST)^* &= S^* T^* + T^* S^* = ST + TS + TS + ST \\ (i(TS - ST))^* &= \overline{i} (S^* T^* - T^* S^*) = -i(ST - TS) = i(TS - ST) \end{aligned}$$

תרגיל

יהי V מרחב עם מכפלה פנימית, ויהי תת-מרחב $U \subseteq V$. מתקיים $V = U \oplus U^\perp$, ולכן לכל $v \in V$ קיים פירוק $v = v_1 + v_2$ כאשר $v_1 \in U, v_2 \in U^\perp$. נגדיר אופרטור $T(v) = v_1 - v_2$. חשב את T^* .

דרך 1:

$$\begin{aligned} \langle u, T^* v \rangle &= \langle T u, v \rangle = \langle u_1 - u_2, v_1 + v_2 \rangle = \langle u_1, v_1 \rangle - \langle u_2, v_2 \rangle + \langle u_1, v_2 \rangle - \langle u_2, v_1 \rangle = \langle u_1, v_1 \rangle - \langle u_2, v_2 \rangle + 0 - 0 \\ &= \langle u_1, v_1 \rangle - \langle u_2, v_2 \rangle - 0 + 0 = \langle u_1, v_1 \rangle - \langle u_2, v_2 \rangle - \langle u_1, v_2 \rangle = \langle u_2, v_1 \rangle \\ &= \langle u_1 + u_2, v_1 - v_2 \rangle \Rightarrow T^* v = v_1 - v_2 = T v \end{aligned}$$

דרך 2:

ניקח B_1 להיות בסיס אורתונורמלי של U , וניקח B_2 להיות בסיס אורתונורמלי של U^\perp . אז $B = B_1 \cup B_2$ הוא בסיס אורתונורמלי של V .

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ & & & -1 & 0 & 0 \\ & & & 0 & -1 & 0 \\ & & & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow [T^*]_B = [T]_B \Rightarrow T^* = T$$

הגדרה

אופרטור T נקרא אורתוגונאלי מעל \mathbb{R} או יוניטרי מעל \mathbb{C} (א"ג) אם $TT^* = 1_V$, ולמטריצות: $AA^* = I_V$.

תכונות

1. לכל u, v : $\langle Tv, Tu \rangle = \langle v, u \rangle$
2. לכל v : $\|Tv\| = \|v\|$
3. T מעבירה בסיס אורתונורמאלי כלשהו לבסיס אורתונורמאלי.

הערה

מטריצה A אורתוגונאלית (אוניטרית) אם ורק אם עמודות A בסיס אורתונורמאלי וגם שורות V הן בסיס אורתונורמאלי.

תרגיל

ניקח T אופרטור יוניטרי אז אם λ ערך עצמי של T אז $|\lambda| = 1$.

נניח $Tv = \lambda v$ כאשר $v \neq 0$.

$$\langle Tv, Tv \rangle = \langle \lambda v, \lambda v \rangle = \bar{\lambda}\lambda \langle v, v \rangle = |\lambda|^2 \langle v, v \rangle$$

$$\langle Tv, Tv \rangle = \langle v, v \rangle \Rightarrow |\lambda| = 1$$

מסקנה: ל T אורתוגונאלית (למעל \mathbb{R}) יכולים להיות רק הערכים העצמיים $+1, -1$.

הגדרה

נסמן ב $O(n)$ את קבוצת המטריצות האורתוגונאליות ב $M_n(\mathbb{R})$.

נסמן ב $U(n)$ את קבוצת המטריצות היוניטריות ב $M_n(\mathbb{C})$.

לדוגמא: ב $O(2)$: סיבובים: $A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$, שיקופים: $A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$.